Spektrálelmélet

2015. december 14-18. BME

Molnár Lajos*

Borbély Gábor†jegyzete‡

*http://www.math.u-szeged.hu/~molnarl/

†http://math.bme.hu/~borbely/

‡A jegyzet legfrissebb változata: 2016. január 26.

Tartalomjegyzék

Tematika

1. Banach algebrák, a Riesz holomorf függvénykalkulus.

2. C^*-algebrák, a folytonos függvénykalkulus.

3. Spektrálmértékek és kommutatív C^*-algebrák reprezentációi, a spektráltétel spektrálintegrálos alakja.

4. von Neumann algebrák, operátortopológiák.

5. Az erős operátortopológiára vonatkozó két alapvető tétel: Neumann dupla kommutáns tétele, és a Kaplansky sűrűségi tétel.

6. Hilbert-Schmidt és nyomoperátorok, a σ-erős és a σ-gyenge topológia.

7. Az $\mathbb{L}^\infty$ függvénykalkulus, kommutatív von Neumann algebrák.

8. A spektráltétel szorzásoperátoros alakja.

1. Motiváció

1.1. Tétel (klasszikus spektráltétel)**.**

$$N \in M_n(\mathbb{C}), NN^* = N^*N$$

Akkor

$$\exists U \in M_n(\mathbb{C})$$

unitér, hogy $UNU^* = D$ diagonális, hogy a diagonális elemek a sajátértékek.

D felfogható úgy, mint szorzás operátor ($D \in M_n(\mathbb{C})$)

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1x_1 \\ d_2x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Vagy $\underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, mint $\{1, 2, \dots n\} \mapsto \mathbb{C}$ függvény, a $C(\{1, 2 \dots n\})$ téren, pontonkénti szorzással.

Vagyis minden normális N mátrix unitér hasonló egy szorzás operátorhoz. Ezt fogjuk általánosítani.

Felfogható úgy is, hogy

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \dots \end{pmatrix} = d_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}}_{P_1} + d_2 \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} + \dots$$

A P-k $0 - 1$ mátrixok, projekciók, egymásra ortogonálisak. Azonos d_i-kre egybeejhetjük a projekciókat. Végtelen dimenzióban a következő lesz

$$\int_{\sigma(N)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$$

Ahol E egy projekció értékű mérték.

Ezzel asztán be tudunk írni egy függvénybe egy mátrixok, lineáris operátort. Heurisztikusan: a D mátrixot "beleírom" a $\chi_{\{d_1\}}$ karakterisztikus függvénybe, $\chi : \sigma(N) \mapsto \{0, 1\}$, akkor azt kapom, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = P_1$$

Kell egy "beleírás" művelet végtelen dimenzióra!

2. Szükséges fogalmak

2.1. Banach algebrák

2.1. Definíció (Banach algebra)**.** *A legyen egy komplex számtest feletti egységelemes ($1 \in A$) algebra, amin van norma ($\| \bullet \|$), amivel ez Banach tér (teljes) és $\forall x, y \in A$ $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Tegyük fel, hogy $\|1\| = 1$. Ekkor A-t* egységelemes Banach algebrának *hívjuk. Most minden egységelemes lesz.*

Példa (nem-kommutatív): X Banach tér, $\mathcal{B}(X)$ az X korlátos lineáris operátorainak albegrája, operátor normával. Nem-kommutatív, ha $\dim(X) \geq 2$.

Példa (kommutatív): K kompakt Haussdorf tér, $C(K)$: a K-n értelmezett komplex értékű folytonos függvények algebrája a sup normával.

Felmerült egy kérdés: $M_n(\mathbb{C})$ minden unitér invariáns normával Banach algebra lesz? Valószínűleg nem, de nem találtunk ellenpéldát.

Egy elem invertálhatósága algebrailag definiált, de Banach algebrában van geometriai interpretációja.

Ha innentől mást nem mondunk, akkor A egy egységelemes Banach algebra.

2.2. Tétel (K. Neumann sor)**.** *Ha $x \in A$, $\|x\| < 1$, akkor $1 - x$ invertálható és*

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Bizonyítás.

$$\left\| \sum x^n \right\| \leq \sum \|x^n\| \leq \sum \|x\|^n < \infty$$

És abszolút konvergenciából következik a konvergencia (Banach téren). Ez inverze $1 - x$-nek, mert

$$(1-x) \sum_{n=0}^{N} x^n = \left(\sum_{n=0}^{N} x^n \right) (1-x) = 1 - x^{N+1} \to 1$$

□

2.3. Megjegyzés. *Tehát 1-hez 1-nél közelebbi algebra beli elem mindig invertálható.*

$$x \text{ invertálható és } \|x - y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|} \Rightarrow y \text{ invertálható}$$

Bizonyítás.

$$x - y = x \cdot (1 - x^{-1} \cdot y)$$

Ebből kijön. □

2.4. Következmény. *Az invertálható elemek nyílt halmazt alkotnak*

2.5. Tétel. *Az invertálás folytonos*

Bizonyítás. Neumann sor □

2.6. Definíció (spektrum)**.** $x \in A$

$$\sigma(x) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} | x - \lambda \cdot 1 \textit{ nem invertálható}\}$$

2.7. Következmény. *$\sigma(x)$ zárt és korlátos, nem üres*

Bizonyítás. korlátosság: $\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow |\lambda| \leq \|x\|$

Indirekt, tegyük fel, hogy $|\lambda| > \|x\|$ és $x - \lambda$ nem invertálható $\Rightarrow 1 > \left\| \frac{x}{\lambda} \right\| \Rightarrow 1 - \frac{x}{\lambda}$ invertálható $\Rightarrow \lambda - x$ invertálható. ↯

A nem üresség komplexben igaz csak. □

2.8. Definíció (Spektrálsugár)**.** *Ha $x \in A$, akkor*

$$r(x) \coloneqq \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$$

Triviálisan $r(x) \leq \|x\|$.

2.9. Tétel (Spektrálsugár formula)**.** $r(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$

2.10. Tétel (Gelfand-Mazur)**.** *Ha A-ban minden elem invertálható a 0 kivételével (ferdetest), akkor $A \cong \mathbb{C}$*

Bizonyítás. Legyen $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ekkor $x \mapsto x - \lambda \cdot 1$ csak akkor nem-invertálható, ha az a nulla leképezés. Így $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow x = \lambda \cdot 1$. Ezzel látjuk, hogy $\sigma(x)$ egy elemű, így definiálhatjuk az $x \mapsto \lambda_x \in \sigma(x) \subset \mathbb{C}$ leképezést. Ez a leképezés egy norma tartó algebra izomorfizmus. □

2.2. Kommutatív Banach algebrák

2.11. Definíció. *Legyen A kommutatív egységelemes Banach-alg. A $\varphi : A \mapsto \mathbb{C}$ nemzérus lineáris funkcionál egy* karakter*, ha szorzás tartó.*

2.12. Tétel. *Ha φ karakter, akkor $\|\varphi\| \leq 1$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists \|x\| = 1$, hogy $|\varphi(x)| > 1$. Ekkor $\left\| \frac{x}{\varphi(x)} \right\| < 1$, így $1 - \frac{x}{\varphi(x)}$ invertálható, vagyis $\exists y \in A$, hogy $\left(1 - \frac{x}{\varphi(x)}\right) y = 1$. Hattatom mindkét oldara a $\varphi(\bullet)$-t.

$$\underbrace{\left(\varphi(1) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}\right)}_{0} \varphi(y) = 1 \ \lightning$$

$\square$

2.13. Definíció. *Adott A kommutatív, egységelemes Banach algebra. Jelölje $\widehat{A}$ az A összes karakterének halmazát. Világos, hogy $\widehat{A} \subseteq (A^*)_1$ (Az A^* zárt egységgömb-je).*

Konstrukció: függvényhalmaz által indukált topológia. Adott X halmazhoz és Y top térhez és adott függvényhalmazhoz megadható az a legszűkebb topológia X-en, amiben a függvényhalmaz összes eleme folytonos.

Egyszerűen húzzuk vissza a megadott összes függvénnyel az Y nyílt halmazait, azok lesznek X nyílt halmazai.

2.14. Definíció. *Legyen X Banach tér. Az X-en az X^*, mint függvényhalmaz által indukált topológiát* az X gyenge topológiájának *hívjuk.*

2.15. Definíció. *Legyen X Banach tér és $x \in X$ tetszőleges. Az*

$$F_x : X^* \mapsto \mathbb{C}, F_x(f) \coloneqq f(x)$$

Látható, hogy $|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, sőt $\|F_x\| = \|x\|$ (Hahn-Banach tétel).

Az $x \mapsto F_x$ izometrikus izomorfizmusa X-nek X^{**}-ba. (ha "-ra", akkor X definíció szerint reflexív).

2.16. Definíció. X^* gyenge *-topológiája *legyen az $\{F_x | x \in X\}$ függvényrendszer által indukált topológia (pontonkénti konvergencia topológia)*

2.17. Tétel (Banach–Alaoglu)**.** $(X^*)_1$ *kompakt a gyenge* **-topológiában.*

2.18. Megjegyzés. *Reflexív térben a gyenge topológiában kompakt az egységgömb. Norma topológiában csak véges dimenzióban. Gyenge* **-topológiában mindig.*

2.19. Állítás. *Ha* A *kommutatív egységelemes Banach-algebra, akkor* $\widehat{A} \subseteq (A^*)_1$ *gyenge* **-zárt, így* $\widehat{A}$ *kompakt Hausdorff tér.*

Hausdorffitás honnan jön? A Riesz reprezentációs tétel miatt van?

Bizonyítás. $\varphi_\alpha \to \varphi$ pontonként (φ_α általánosított sorozat α indexszel).

$$\varphi(xy) = \lim \underbrace{\varphi_\alpha(xy)}_{\varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(y)} = \varphi(x)\varphi(y)$$

És $\varphi_\alpha(1) \to \varphi(1)$, így $\varphi \in \widehat{A}$. $\square$

2.20. Definíció. *Legyen* $x \in A$

$$\widehat{x}(\varphi) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \widehat{A})$$

Ekkor $\widehat{x} \in C(\widehat{A})$ *és* $\widehat{x}$*-t az* x Gelfand transzformáltjának *hívjuk.*

Kell: ha $\varphi_\alpha \to \varphi$, akkor $\widehat{x}(\varphi_\alpha) \to \widehat{x}(\varphi)$, trivi.

2.21. Tétel. *Az* $x \to \widehat{x}$ *Gelfand transzformáció algebra homomorfizmusa* A*-nak* $C(\widehat{A})$*-be aminek a képtere olyan részalgebrája* $C(\widehat{A})$*-nak, ami sehol sem tűnik el és szeparálja* $\widehat{A}$ *pontjait.*

Megj: Stone–Weierstrass tétel.

$$\|\widehat{x}\| = \sup_{\varphi \in \widehat{A}} \underbrace{|\widehat{x}(\varphi)|}_{\varphi(x)} \leq \|x\|$$

2.22. Állítás. *A legyen kommutatív egységelemes Banach algebra (általánosabbra is igaz).* $x \in A$ *nem invertálható* $\Leftrightarrow$ x *eleme az* A *egy valódi ideáljának.*

Bizonyítás. Legyen $Ax = \{ax | a \in A\}$ ideál A-ban. Ez nem az egész A, mert x nem invertálható. Másik irány, ha x invertálható lenne és eleme egy I ideálnak, ekkor $x^{-1}x \in I$, de $1 \in I \Rightarrow I$ nem valódi. $\square$

Az ideál nálunk definíció szerint altér is.

2.23. Állítás. *A minden valódi ideálja része egy maximális ideálnak és minden maximális ideál zárt.*

Bizonyítás. Legyen I ideál, ekkor $\text{dist}(I, 1) \geq 1$. Ehhez tegyük fel indirekt, hogy $\exists i \in I$, hogy $\|i - I\| < 1 \Rightarrow i$ invertálható. $\lightning$

Ezek után, az első rész a Zorn lemmából jön. A rendezett láncok uniója is valódi ideál lesz (elkerüli 1-et).

Zártság: Ha M maximális ideál, akkor $\overline{M}$ is ideál (műveletek folytonosak) és $1 \notin \overline{M}$, tehát valódi ideál. Így $M = \overline{M}$ kell legyen a maximalitás miatt. $\square$

2.24. Következmény. *x nem-invertálható $\Leftrightarrow$ x eleme egy maximális ideálnak.*

2.25. Tétel. *A maximális ideáljai az A karaktereinek magjai.*

Bizonyítás. Minden karakter magja max ideál, 1 ko-dimenziós.

Ha maximális ideál, akkor hogyan lesz karakter mag? Legyen M egy maximális ideál. Tekintsük A/M faktorteret. Ez is kommutatív egységelemes Banach algebra lesz (M zárt). A maximalitás miatt ez ferde test lesz a következő érvelés miatt.

Legyen $x \in A$, de $x \notin M$, ekkor $[x] \neq 0 \in A/M$.

$$Ax + M$$

Az $ax + m$ alakú elemek ideált alkotnak, ami tartalmazza x-et és M-et. Ekkor ez az A lesz, mert M maximális volt.

$$Ax + M = A$$

Ekkor $[1] = [a][x]$ megoldható a-ra, vagyis x osztálya invertálható.

Vagyis valóban ferdetest $\Rightarrow A/M \cong \mathbb{C}$. Tekintsük az $i : A/M \mapsto \mathbb{C}$ izomorfizmust. $x \mapsto i([x])$ egy karaktere A-nak és magja M. $\square$

2.26. Tétel. *Tetsz. $x \in A$ esetén*

$$\sigma(x) = \{\varphi(x) | \varphi \in \widehat{A}\}$$

Bizonyítás. $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow x - \lambda 1$ nem inv. $\Leftrightarrow \exists \varphi \in \widehat{A}$ hogy $\varphi(x - \lambda 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{\varphi(x) | \varphi \in \widehat{A}\}$

$\square$

2.27. Következmény. *A Gelfand transzformált magja:*

$$\{x \in A | \widehat{x}(\varphi) = 0 \ \forall \varphi \in \widehat{A}\} = \{x \in A | \sigma(x) = \{0\}\}$$

Ezek a "kvázi nillpotens" elemek, mert spektrál sugaruk 0.

2.28. Tétel. *Legyen A nem feltétlenül kommutatív egységelemes Banach algebra. $x, y \in A$ felcserélhető elemek. Ekkor*

$$r(x+y) \leq r(x) + r(y) \text{ és } r(xy) \leq r(x)r(y)$$

Bizonyítás. A másodikat könnyű belátni a spektrál formulából. Az első nem is fog kelleni, de igaz.

Legyen $A_0 = A(x, y)$ a két elem által generált kommutatív egységelemes Banach algebra.

$$r(x+y) = \underbrace{r_{A_0}(x+y)}_{\text{ez már kommutatív}} = \|\widehat{x+y}\| \underbrace{=}_{\text{sup normák miatt}} \|\widehat{x} + \widehat{y}\|$$

$$\leq \|\widehat{x}\| + \|\widehat{y}\| = r_{A_0}(x) + r_{A_0}(y)$$

a spektrál sugár az A_0-ban és mivel $x, y, x+y \in A_0 \subset A$, ezért ott a normák (így a spektrálsugarak) megegyeznek. □

2.3. C^*-algebrák

2.29. Definíció. *Legyen A egy egységelemes Banach algebra, amin adott egy $^* : A \mapsto A$ involúció amely*

- *lineáris:* $(x+y)^* = x^* + y^*$
- *sorzásra:* $(xy)^* = y^* x^*$
- *skalárra konjugálás:* $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$
- *involutív:* $(x^*)^* = x$
- $\|x^* x\| = \|x\|^2$

Ekkor A-t C^*-algebrának *hívjuk.*

Ha az utolsó pontot elhagyom, akkor csak *-*algebra.*
C^*-albegrából következik, hogy $1^* = 1$, mert

$$x^* \cdot 1 = x^* \ / \bullet^* \quad \forall x$$
$$1^* \cdot x = x \quad \text{ezt } x = 1\text{-re aklalmazva:}$$
$$\underbrace{1^* \cdot 1}_{1^*} = 1$$

Példa: $\mathcal{B}(H)$, H Hilbert tér, operátor adjungálttal.

Példa: kompakt téren folytonos függvények pontonkénti konjugálása ($C(K)$), ez kommutatív is.

2.30. Tétel. *Ha A egy C^*-algebra, $x \in A$, $x^* = x$, akkor $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $x = x^*$ és $\alpha + i\beta \in \sigma(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de $\beta \neq 0$. Következik hogy $i \in \sigma\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$, legyen $\frac{x-\alpha}{\beta}$ egy másik önadjungált elem. Feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy $i \in \sigma(x)$ Ekkor

$$1 - t \in \sigma(1 + itx) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Így

$$1-2t+t^2 = |1-t|^2 \leq \|1+itx\|^2 = \| \underbrace{(1-itx)(1+itx)}_{\text{kell hogy } x=x^*} \| = \|1+t^2x^2\| \leq 1+t^2\|x\|^2$$

Az kéne, hogy

$$0 \leq t^2(\|x\|^2 - 1) + 2t$$

Ez nem lehet igaz minden t-re! $\square$

2.31. Állítás. *Legyen A kommutatív egységelemes C^*-algebra. Ha $x \in A$ tetsző-leges, $\varphi \in \widehat{A}$, akkor $\overline{\varphi(x)} = \varphi(x^*)$ és ezért $\overline{\widehat{x}} = \widehat{x^*}$.*

Bizonyítás.
$$x = \frac{x + x^*}{2} + i\frac{x - x^*}{2i} = h + ik$$
h, k önadjungáltak. Ekkor $x^* = h - ik$ és

$$\varphi(x^*) = \varphi(h) - i\varphi(k)$$

Ugyanaz, mint

$$\overline{\varphi(x)} = \overline{\varphi(h) + i\varphi(k)}$$

$\square$

2.32. Állítás. *Ha $x \in A$ önadjungált elem (A nem feltétlen kommutatív), akkor $r(x) = \|x\|$.*

Bizonyítás.

$$\|x^2\| = \|x^*x\| = \|x\|^2$$
$$\|x^4\| = \|(x^2)^* \cdot x^2\| = \|x^2\|^2 = \|x\|^4$$
$$\vdots$$
$$\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$$

Így a spektrál formulában $\sqrt[n]{\|x^n\|}$ egy részsorozat mentén konstans, így $r(x) = \|x\|$. $\square$

2.33. Megjegyzés. *Ez normálisra is igaz.*

Bizonyítás.

$$r(xx^*) \leq r(x)r(x^*) = r(x)^2$$

xx^* önadjungált így $r(xx^*) = \|xx^*\| = \|x\|^2$. Így $\|x\| \leq r(x)$, de $r(x) \leq \|x\|$ is igaz, mert $|\lambda| \leq \|x\|$ minden spektrumbeli pontra és r ilyenek szuprémuma. $\square$

2.34. Tétel (Gelfand-Naimark)**.** *Legyen A kommutatív, egységelemes C^*-algebra. Ekkor az $x \mapsto \widehat{x}$ Gelfand transzformáció egy *-algebra izomorfizmusa A-nak $C(\widehat{A})$-ra.*

Bizonyítás. A Gelfand transzformáció általában algebra homomorfizmus, melynek képe mint algebra sehol sem tűnik el és szeparálja $\widehat{A}$ tetőpontjait. Most láttuk, hogy jól viselkedik a * művelettel.

Tetszőleges $x \in A$-ra ha x normális, akkor adódik hogy $\|x\| = r(x) = \|\widehat{x}\|$.

A Gelfand transzformáció képtere egy konjugálásra nézve zárt sehol el nem tűnő szeparáló részalgebra. Így a Stone–Weierstrass-tétel miatt sűrű, de zárt is (teljes tér izometrikus képe), így ez az egész tér.

Így a Genfand transzformáció szürjektív. $\square$

3. Holomorf függvénykalkulus

Riesz-Dunford féle függvénykalkukus. Cartan csinálta először mátrixokra.

Természetes elvárás: identitásra és polinomokra ugyanaz legyen, mint a hagyományos polinom kiértékelés az operátoron.

3.1. Tétel (Cauchy). *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, $f : D \mapsto \mathbb{C}$ holomorf függvény (komplex differenciálható).*

Legyen Γ egy ciklus D-ben ami nem kerül meg egyetlen D-n kívüli pontot sem. Ekkor

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \quad \forall z \in D \setminus \mathrm{Ran}(\Gamma)$$

És

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$$

Tegyük fel, hogy az index most 1.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi)(\xi - z)^{-1}\,\mathrm{d}\xi$$

Lesz $x \in A$-ra:

$$f(x) \coloneqq \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi)(\xi - x)^{-1}\,\mathrm{d}\xi$$

Kell: Banach tér értékű integrál kidolgozása és a megkerülő ciklus megfelelője.

Legyen $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ pálya, $f : \mathrm{Ran}(\gamma) \mapsto X$ folytonos függvény, X Banach tér. Szokásos Stieltjes integrál eljárás: $[a, b]$ normális beosztássorozatra:

$$\sum f(\gamma(\xi_i))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) \quad \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

Egy finomabb felosztásra becsülhető a különbség:

$$\sum \left(f(\gamma(\xi_i)) - f(\gamma({\xi'}_i))\right)\left(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\right)$$

f egyenletes folytonossága esetén ez normában kicsi.

$$\| \bullet \| \leq \sum \|f(\gamma(\xi_i)) - f(\gamma({\xi'}_i))\| \cdot |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

Így kapjuk az $\int_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ vektort, az f-nek a γ pálya menti integrálját.

Vegyük észre:

- f-ben lineáris

- érvényes:

$$\left\| \int_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right\| \le \left(\sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \right) \cdot \underbrace{\bigvee_a^b(\gamma)}_{\gamma \text{ hossza}}$$

- Ha f Banach algebra értékű és $a \in X$, akkor

$$\int_\gamma (a\cdot f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = a \cdot \int_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

- $\forall \widehat{x} \in X^*$-ra:

$$\widehat{x}\left(\int_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right) = \int_\gamma \widehat{x}\left(f(\xi)\right)\,\mathrm{d}\xi$$

Megjegyzés: holomorf függvény hatványsorába beírni f-et nem elég, az csak lokálisan jó.

3.2. Állítás. *Ha $D \subset \mathbb{C}$ nyílt és $K \subset D$ kompakt, akkor $\exists \Gamma$ ciklus $D \setminus K$-ban, amire*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \quad (z \in D^c)$$

és

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1 \quad (z \in K)$$

Bizonyítás. Kis négyzetekkel lefedjük K-t, amelyek már nem metszenek ∂D-be. Ezeken a kis négyzetek kerületén egyesével körintegrált végezve az érintkező négyzetek oldalai kiütik egymást. K-t nem érintő, de megkerülő élek maradnak. □

3.3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt, $f : D \mapsto \mathbb{C}$ holomorf. $x \in A$ (A egységelemes Banach algebra). $\sigma(x) \subset D$, Γ olyan ciklus D-ben, ami körül veszi $\sigma(x)$-et, de D-n kívüli pontot nem. Ekkor*

$$f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi)(\xi - x)^{-1}\,\mathrm{d}\xi$$

3.4. Megjegyzés. *Az integrál elvégezhető, mert az invertálás folytonos a spektrum komplementerén.*

Ez jól definiált: $f(x)$ független Γ-tól és D-től.

Bizonyítás. Legyen Γ_1, Γ_2 két görbe. $\Gamma := \Gamma_1 - \Gamma_2$ összefűzött görbe, ez egyszer sem kerüli meg a $\sigma(x)$-et. Erre igaz a komplex függvéntan beli Cauchy formula bármilyen $\widehat{x}$ funkcionállal:

$$\xi \mapsto \widehat{x}\left((\xi - x)^{-1}\right)$$

Ez holomorf, igaz rá a Cauchy formula. Hahn Banach értelmében pedig a vektor maga 0. Így Γ-n az integrál 0, vagyis Γ_1 és Γ_2-re megegyezik.

Egyébiránt a rezolvens függvény

$$r_x : \xi \mapsto (\xi - x)^{-1}$$

Frechet deriválható is.

Igaz a rezolvens azonosság:

$$r_x(\xi) - r_x(\eta) = (\xi - x)^{-1} - (\eta - x)^{-1} = (\xi - \eta) r_x(\xi) r_x(\eta)$$

Ezért $f(\xi)(\xi - x)^{-1}$ holomorf $D \setminus \sigma(x)$-en, mint Banach értékű függvény. □

3.5. Állítás. *Legyen $x \in A$, $\sigma(x) \subset D \subset \mathbb{C}$ nyílt, Γ ciklus, ami körül veszi $\sigma(x)$-et a D-ben. Ekkor $n \in \mathbb{N}$-re*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\xi - z_0)^n (\xi - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi = (x - z_0)^n$$

Ha $z_0 \notin D$, akkor $n = -1, -2, \ldots$-re is.

Bizonyítás. Az integrál elvégezhető. Miért pont az az eredmény? A bal oldalt nevezzük el I_n-nek. Megmutatjuk, hogy $I_{n+1} = I_n(x - z_0)$ és $I_0 = 1$. Ezzel pozitív és negatív n-re is következik az állítás.

$$I_n(x - z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\xi - z_0)^n \underbrace{(x - z_0)}_{(\xi - z_0 + x - \xi)} (\xi - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\xi - z_0)^{n+1} (\xi - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\xi - z_0)^n (-1) \,\mathrm{d}\xi}_{\text{holomorfitás miatt 0}}$$

$n = 0$-ra:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\xi - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi$$

Tudjuk hogy

$$(\xi - x)^{-1} = \xi^{-1} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)^{-1} = \sum \frac{x^n}{\xi^{n+1}}$$

sor előállítás érvényes, mert $\left\| \frac{x}{\xi} \right\| < 1$, elég nagy Γ börbét nézve ($\Gamma(t) > \|x\|$). Így

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\xi - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi = \sum x^n \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\xi^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi}_{n=0\text{-ra nem nulla csak}} \Big) = 1$$

□

3.6. Következmény. *Az integrál jól definiált és a kívánt eredményt adja recionális tört függfényekre is.*

Bizonyítás. A racionális törtfüggvények $(x - z_0)^n$-ekből kikeverhetőek. $\square$

3.7. Tétel. *Legyen A Banach algebra. A fentiekben definiált $f \mapsto f(x)$ függvénykalkulus rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.*

1. *algebra homomorfizmus*
2. $1(x) = 1$ *(konstans egy függvénybe beleírva x-et az egységelemet kapom).*
3. $\mathrm{id}(x) = x$
4. *folytonos a kompakt részhalmazokon egyenletes konvergencia topológiára nézve. Ha $f_n \to f$ egyenletesen folytonosan Γ-n, akkor $f_n(x) \to f(x)$ operátor normában.*
5. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$*-re* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
6. *továbbá az első négy tulajdonság karakterizálja is a függvénykalkulust.*

Bizonyítás. Minden igaz racionális tört függvényekre és azok sűrűek a Runge tétel miatt (racionális függvények sűrűn vannak a kompakt tartományon holomorf függvények terében, a polinomok nem). $\square$

Kérdés: Mi a kalkulus, ha $A = C(K)$? $x \in C(K)$-ra $\sigma(x) = \mathrm{Ran}(x)$ (x folytonos függvény)?

Legyen $D \subset \mathbb{C}$, $\sigma(x) \subset D$, $f \in H(D)$ (f holomorf D-n). Ekkor

$$f(x) = f \circ x$$

mert kielégíti az első négy tulajdonságot az előző tételben.

3.8. Tétel (Spektrál leképezési tétel)**.** *$x \in A$, $\sigma(x) \subset D$ nyílt. Ha $f \in H(D)$, akkor*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$$

Továbbá ha g holomorf az $f(D)$ egy környezetében, akkor

$$f(g(x)) = (g \circ f)(x)$$

Bizonyítás. $\lambda \in \sigma(f(x)) \Leftrightarrow 0 \in \sigma((f-\lambda)(x))$. Elég belátni, hogy a 0 egyszerre van benne a két spektrumban.

Legyen $0 \notin f(\sigma(x)) \Rightarrow f$ nem zérus $\sigma(x)$ egy környezetében (f folytonos). Van inverze: $\exists g$ holomorf ebben a környezetben, hogy $f \cdot g \equiv 1 \Rightarrow f(x)g(x) = 1$ vagyis $f(x)$ invertálható $\Rightarrow 0 \notin \sigma(f(x))$.

Ha pedig $0 \in f(\sigma(x))$, akkor $\exists z_0 \in \sigma(x)$ hogy $f(z_0) = 0$ és $f(z) = (z - z_0)g(z)$ alakú valamilyen g holomorfra. Így $f(x) = (x - z_0)g(x)$ nem invertálható elem, mert egy nem invertálható szorzata egy vele fecserélhetővel. Így $0 \in \sigma(f(x))$

Második állításhoz megmutatható, hogy $g \mapsto (g \circ f)(x)$ leképezés rendelkezik az $f(x)$ elemhez tartozó függvénykalulus karakterizáló tulajdonságaival.

$\square$

3.9. Megjegyzés. *Ha $f(x) = g(x)$ egy x-re, akkor $f = g$ a $\sigma(x)$-en.*

Bizonyítás.

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow \sigma((f-g)(x)) = \{0\} \Leftrightarrow (f-g)(\sigma(x)) = \{0\}$$

$\square$

3.10. Definíció. *Legyen X komplex Banach tér. $A \in \mathcal{B}(X)$, A* pontspektruma*:*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists x \neq 0, x \in X : Ax = \lambda x\}$$

3.11. Tétel. *Legyen $A \in \mathcal{B}(X)$, $\sigma(A) \subset D \subset \mathbb{C}$ nyílt, $f \in \underbrace{\mathcal{O}(D)}_{D\text{-n holomorf függvények}}$, ami nem konstans D egyetlen komponensén sem. Ekkor*

$$\sigma_p(f(A)) = f(\sigma_p(A))$$

Bizonyítás. Csak a nullát nézzük: $0 \in f(\sigma_p(A)) \Rightarrow \exists z_0 \in \sigma_p(A)$ hogy $f(z_0) = 0$. Így $Ax = z_0 x$, $x \neq 0, x \in X$. Így racionális törtfüggvényre is: $R(A)x = R(z_0)x$. Runge tétellel következik minden holomorf függvényre: $f(A)x = f(z_0)x$, így $0 \in \sigma_p(f(A))$.

Fordítva: $0 \in \sigma_p(f(A)) \Rightarrow 0 \in f(\sigma(A))$. Unicitás tétel miatt és egy kis topológiával látható

??

, hogy f-nek véges sok zárushelye van $\sigma(A)$-ban (f-ről kikötöttük, hogy nem konstans egyetlen komponensben sem). Vagyis a gyökök multiplicitása véges: $f(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_n)^{k_n} h(z)$. h-nak nincsen gyöke a spektrumon.

$$0 = f(A)x = (A - z_1)^{k_1} \dots (A - z_n)^{k_n} h(A)x$$

Ha $A - z_1$ nulla a maradékon, akkor z_1 sajátértéke $f(A)$-nak. Ha nem, akkor következő tagra: $A - z_2$ nulla a maradékon. Ha egyik sem, akkor $h(A)x = 0$, ami nem lehet, mert $h(A)$ invertálható. Vagyis a $z_1, z_2 \dots z_n$ közül legalább az egyik sajátértéke $f(A)$-nak. $0 \in f(\sigma_p(A))$.

□

3.12. Tétel. *Ha $T \in \mathcal{B}(H)$ Hilbert tér operátora normális és $S \in \mathcal{B}(H)$ tetszőleges hogy $TS = ST$, akkor $T^*S = ST^*$.*

Bizonyítás. Minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re $\frac{\lambda T - (\lambda T)^*}{2i}$ önadjungált és

$$U(\lambda) := \exp(\lambda T - (\lambda T)^*) = e^{2i\frac{\lambda T - (\lambda T)^*}{2i}}$$

unitér. És $\left(e^H\right)^* = e^{-iH} = \left(e^{iH}\right)^{-1}$ unitér. Így

$$e^{-(\lambda T)^*} S e^{(\lambda T)^*} = e^{-(\lambda T)^*} \underbrace{e^{\lambda T} S e^{-\lambda T}}_{S \cdot 1} e^{(\lambda T)^*} = e^{\lambda T - (\lambda T)^*} S \left[e^{\lambda T - (\lambda T)^*}\right]^{-1}$$

Kell hozzá az, hogy $AB = BA$ Banach algebra beliekre $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

$$\left\| e^{-(\lambda T)^*} S e^{(\lambda T)^*} \right\| = \|U(\lambda) \cdot S \cdot U(\lambda)^*\| = \|S\|$$

Liouville tétel miatt a fenti függvény konstans (korlátos): azaz

$$S e^{(\lambda T)^*} = e^{(\lambda T)^*} S$$

Ekvivalens módon:

$$ST^* = T^*S$$

???

□

3.13. Állítás. *$M, N \in \mathcal{B}(H)$ normálisak, és $S \in \mathcal{B}(H)$ hogy $NS = SM$, akkor $N^*S = SM^*$.*

Bizonyítás.

$$A \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{smallmatrix}\right)$$

$H \times H$-n, $R \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Erre $AR = RA$ miatt $A^*R = RA^*$, ami:

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & N^*S \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & SM^* \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

□

4. Folytonos függvénykalkulus

Emlékezzünk a Gelfand-Naimark (2.34-es) tételre.

Folytonos függvénykalkukus normális elemekre lesz, ehhez önadjungáltra lesz először.

Legyen A egy nem feltétlen kommutatív, egységelemes C^*-algebra, $x \in A, x^* = x$. Tetszőleges P valós változós, de komplex együtthatós polinomra $P \mapsto P(x)$-et elvégezhettem.

Ez nyilvánvaló és jó, *-algebra homomorfizmus, tartja a műveleteket. Injektivitás megvan-e? Izometrikus? $P(x)$ normális, adjungáltja polinomja $x^* = x$-nek. $\sigma(P(x)) = P(\sigma(x))$ (ez itt direktbe kiszámolható). És

$$\|P(x)\| = r(P(x)) = \sup_{\sigma(x)} |P|$$

Így $P \mapsto P(x)$ egy izometria a polinom algebrából A-ba. Ezen polinomok a sup normában sűrűek a folytonos függvények terében ("hagyományos" Weierstrass tételhez kell hogy valós a spektrum). Így ez a kalkulus egyértelműen kiterjeszthető $C(\sigma(x))$-en értelmezett izometrikus *-algebra izomorfizmussá A-ba.

Ez jó önadjungáltakra (megvannak az egyértelműségi tulajdonságok), normálisokra nem elég.

4.1. Tétel (Spektrum szűkítés)**.** *Legyen A mint előbb, $B \subset A$ rész C^*-algebra. $1 \in B$, B zárt A-ban. Ekkor tetszőleges $x \in B$-re*

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$$

Bizonyítás. Ez nyilvánvaló abban az iárnyban, hogy a B-ben tágabb a spektrum. És nem is igaz a másik irány csupasz algebrákra.

Kell: $x \in B$ invertálható B-ben $\Leftarrow$ invertálható A-ban.

Önadjungáltra: legyen $x = x^*$ és x invertálható A-ban. $0 \notin \sigma_A(x)$. Vagyis $\frac{1}{t} \in C(\sigma(x))$ $(\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x))$. És $t \cdot \frac{1}{t} = 1$, így ez előzőek miatt

$$x \cdot \left(\frac{1}{t}\right)(x) = 1$$

Approximáljuk $\frac{1}{t}$-t polinomokkal.

$$\left(\frac{1}{t}\right)(x) = \text{norma-limesze } P_n(x)\text{-eknek}$$

$P_n(x) \in B$, így B-ben is approximálunk, B zárt.

Nem önadjungáltra: legyen x tetszőleges invertálható elem A-ban. Ekkor $x \in B$ és invertálható A-ban. Így $x^* \in B$ és invertálható A-ban. $x^* \cdot x$ önadjungált és invertálható A-ban, ekkor B-ben is. Így x bal invertálható B-ben. De hasonlóan jobb invertálható is, így invertálható. □

4.2. Megjegyzés. *C^*-algebrán a C^*-norma egyértelmű*

Bizonyítás.

$$r(x) = \lim \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

És

$$r(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2$$

Vagyis $\|x\| = \sqrt{r(x^*x)}$. □

Ha A C^*-algebra, $x \in A$ normális, akkor az x-által generált egységelemes C^*-algebra:

$$\overline{\{P(x, x^*) | P \text{ két változós komplex polinom}\}}$$

Normára lezárva. Jelölés: $C^*(x)$.

4.3. Tétel. *Legyen A szokásos, x normális. Ekkor $\exists!$ olyan Φ izometrikus *-algebra izomorfizmus $C(\sigma(x))$ és $C^*(x)$ között, melyre a konstans 1 függvény képe az egység elem, identitás függvény képe x.*

4.4. Tétel. *$B = C^*(x)$ egy kommutatív C^*-algebra. Legyen $\widehat{B}$ ennek a karaktertere (struktúratere vagy maximális ideál-tere). Ekkor a Gelfand transzformáció $y \mapsto \widehat{y}$ egy izometrikus *-algebra izomorfizmus B-ről $C(\widehat{B})$-re.*

Bizonyítás.
$$\widehat{x} : \widehat{B} \mapsto \{\underbrace{\widehat{x}(\varphi)}_{\varphi(x)} | \varphi \in \widehat{B}\} = \sigma_B(x) = \sigma_A(x)$$

És ez injektív, mert:

$$\widehat{x}(\varphi) = \widehat{x}(\psi) \Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x) \Leftrightarrow \overline{\varphi(x)} = \overline{\psi(x)}$$

Így minden polinomjuk is egyenlő, amik sűrűek, így $\varphi = \psi$ $C^*(x)$-ben.

Tehát $\widehat{x} : \widehat{B} \mapsto \sigma_A(x)$ folytonos, bijektív. A $\widehat{B}$ és $\sigma(x)$ kompaktak, Hausdorff-ak, így az inverze is folytonos, így homeomorfizmus.

Tekintsük ez után $y \mapsto \widehat{y} \circ \widehat{x}^{-1}$-et, ami $C^*(x)$-ről $C(\sigma(x))$-re képez.

Erre nézve 1 képe konstans 1 függvény. x-képe identitás függvény. Ezzel a kívánt izomorfizmus inverzét konstruáltuk meg. □

Konstrukció: Y, Z kompakt Hausdorff terek és $t : Y \mapsto Z$ homeomorfizmus esetén $f \mapsto f \circ t$ egy izometrikus *-algebra izmorfizmus $C(Y)$-ból $C(Z)$-re.

4.5. Definíció. *A fenti tétel jelöléseivel a Φ transzformációt az x normális elemhez tartozó folytonos függvénykalkukusnak nevezzük és $\Phi(f)$ helyett $f(x)$-et írunk.*

4.6. Tétel (Spektrálleképezési tétel)**.** *Legyen A egy C^*-algebra, $x \in A$ egy normális elem, $f \in C(\sigma(x))$, akkor*
$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$$
Továbbá ha $g \in C(f(\sigma(x)))$, akkor $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Bizonyítás. $0 \in \sigma(f(x)) \overset{?}{\overbrace{\Leftrightarrow}} 0 \in f(\sigma(x))$-et nézzük csak. Ehhez kell: $f(x)$ invertálható $\Leftrightarrow f$ sehol sem 0 a $\sigma(x)$-en. A $\Leftarrow$ irány trivi. A jobbra irányhoz $\frac{1}{f}$ függvénnyel elvégezhetem a kalkulust $f(x) \cdot \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \mathrm{id}$, vagyis $f(x)$-nek van inverze A-ban, így a spektrumszűkítés miatt invertálható $C^*(x) = \{g(x) | g \in C(\sigma(x))\}$ -en is. Azaz $\exists g \in C(\sigma(x))$ hogy $f(x) \cdot g(x) = 1 \Rightarrow f \cdot g \equiv 1 \Rightarrow f$ sehol sem tűnik el.

A kompozícióhoz: már látjuk, hogy mindkét oldal értelmes (elvégezető), kell: $g \circ f$ transzformáció rendelkezik az $f(x)$-hez tartozó függvénykalkukus karakterizáló tulajdonságaival. □

4.1. Alkalmazások

H általában Hilbert tér lesz.

4.7. Tétel. *Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$, komplex H Hilbert térre. Ekkor A-nak létezik jobb inverze $\mathcal{B}(H)$-ban $\Leftrightarrow$ A szürjektív.*

A-nak létezik bal inverze $\mathcal{B}(H)$-ban $\Leftrightarrow$ A alulról korlátos ($\exists c > 0, \|Ax\| \geq c\|x\| \, \forall x \in H$).

Bizonyítás. Ha A bal invertálható, akkor $\exists B \in \mathcal{B}(H)$ hogy $BA = I$.

$$\|B\| \cdot \|Ax\| \geq \|BAx\| = \|x\|$$

Így $\|A\| \geq \frac{1}{\|B\|}$.

Fordítva ha A alulról korlátos: $\|Ax\| \geq c\|x\|$, akkor

$$\|A(x_n - x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\|$$

Így ha Ax tart valahova, akkor x tart annak az inverzéhez. A értékkészlete teljes, így $\mathrm{Ran}(A)$ zárt, A injektív. Így

$$A : H \mapsto \mathrm{Ran}(A) \text{ bijekció}$$

Korlátos leképezések tétele miatt (Banach tétele a korlátos inverzről) $\exists B_0 : \mathrm{Ran}(A) \mapsto H$ korlátos lineáris operátor úgy, hogy $B_0 A = I$. B_0-t pedig kiterjeszthetem: $Bx \coloneqq 0$ a $\mathrm{Ran}(A)^\perp$-en. Ez a B jó lesz.

Megjegyzés: nem kell az inverzhez a Banach tétel, mert feltétel az alulról korlátosság.

Az első részhez: ha $\exists J \in \mathcal{B}(H)$ hogy $AJ = I$, akkor A szürjektív. Ekkor $A_0 \coloneqq A|_{\mathrm{Ker}(A)^\perp}$ injektív is.

$$A_0 : \mathrm{Ker}(A)^\perp \mapsto H \text{ bijekció}$$

Így van egy $J_0 : H \mapsto \mathrm{Ker}(A)^\perp$ korlátos lineáris operátor hogy $AJ_0 = I$. Ez a J_0 jobb inverz. □

4.8. Következmény. *$A \in \mathcal{B}(H)$ invertálható (az algebrában) $\Leftrightarrow$ A szürjektív és alulról korlátos. (Elég hogy képtere sűrű)*

4.9. Állítás. *$N \in \mathcal{B}(H)$ normális operátor invertálható $\Leftrightarrow$ N alulról korlátos.*

Bizonyítás. A vissza irány az érdekes. Ekkor N és N^* is alulról korlátos, mert normális operátorra $\|N\| = \|N^*\|$

$$\|Nx\|^2 = \langle Nx, Nx\rangle = \langle N^*Nx, x\rangle = \langle NN^*x, x\rangle = \langle N^*x, N^*x\rangle = \|N^*x\|^2$$

Így N-nek és N^*-nak is van bal inverze, így N^*-ból N-nek van jobb inverze. □

4.10. Tétel. *Legyen $N \in \mathcal{B}(H)$ normális, ekkor*

$$\sigma(N) = \sigma_{ap}(N) = \text{ approximatív pontspektrum}$$

Bizonyítás. világos, hogy

$$\lambda \in \sigma(N) \Leftrightarrow N - \lambda \text{ nem invertálható} \Rightarrow N - \lambda \text{ nem alulról korlátos}$$

Vagyis ha nem invertálható, akkor $\exists x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$ hogy $\|Nx_n - \lambda x_n\| \to 0$. Vagyis $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(N)$

A másik irány triviális. □

4.11. Állítás. *Az izolált pontok a spektrumban a pontspektrumhoz tartoznak.*

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \sigma(N)$ izolált pont. Ekkor $\chi_{\{\lambda\}}$ folytonos $\sigma(N)$-en. Erre $P \coloneqq \chi(N)$ egy projekció (négyzete és adjungáltja önnmaga a függvénykalkukus tulajdonságai miatt).

A függvények kompozíciójával látszik, hogy $\mathrm{id} \cdot \chi = \lambda \cdot \chi$, így az operátorokra is:

$$NP = \lambda P$$

Legyen $x \in \mathrm{Ran}(P)$, akkor $NPx \coloneqq Nx$

$$\lambda Px = \lambda x$$

Ez az x jó saját vektornak. □

4.12. Megjegyzés. *Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$ normális, ekkor*

1. *A önadjungált $\Leftrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$*
2. *A unitér $\Leftrightarrow \sigma(A) \subset S^1$ (körvonal)*
3. *A projekció $\Leftrightarrow \sigma(A) \subset \{0, 1\}$*

Bizonyítás. (1) $A = A^* \Leftrightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ a $\sigma(A)$-n, az identitás függvénnyel való függvénykalkukus miatt. (2) ... $\square$

4.13. Definíció. *Legyen A C^*-algebra, $x \in A$, x-et* pozitív*nak nevezzük, ha $x = x^*$ és $\sigma(x) \subset [0, \infty)$.*

4.14. Definíció. *Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$, A-t* pozitív*nak nevezzük, ha $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ $\forall x \in H$.*

4.15. Tétel. *A két pozitivitás fogalom megegyezik*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{B}(H)$ önadjungált és spektruma nem negatív.

A gyök függvény folytonos, azzal lehet $B := \sqrt{(}A \in \mathcal{B}(H)$-t venni. $\sqrt{A}^2 = (\sqrt{\ } \cdot \sqrt{\ })(A)$ Vagyis $A = B^2$ egy önadjungált B-re, így

$$\langle Ax, x\rangle = \langle BBx, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle \geq 0$$

Fordítva legyen $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ ekkor $\langle A^*x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle$ valósak ($\forall x \in H$). Ekkor A önadjungált reprezentációs tételek miatt (polarizációs azonosság és Riesz).

Ekkor $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{ap}}(A)$ vagyis $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow$

$$\exists \|x_n\| = 1, Ax_n - \lambda x_n \overset{\|\bullet\|}{\to} 0$$

Mindkét oldalt szorozzuk meg skalárisan x_n-el.

$$\underbrace{\langle Ax_n, x_n\rangle}_{\geq 0} - \lambda \langle x_n, x_n\rangle \to 0$$

Ebből látszik, hogy λ nem lehet negatív. $\square$

4.16. Tétel. *Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$ pozitív operátor. Ekkor $\exists! B \in \mathcal{B}(H)$ hogy B pozitív, hogy $B^2 = A$.*

Ezt $\sqrt{A}$-val jelöljük.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy A önadjungált és spektruma nem-negatív: $B := \sqrt{A}$.

B spektruma szintén valós, így B önadjungált. Spektruma szintén nem negatív, így B pozitív.

Egyértelműség: Tegyük fel hogy $\exists C \in \mathcal{B}(H)$ hogy $C^2 = A$, C önadjungált, pozitív. Ekkor $C \underbrace{A}_{C^2} = AC$. A gyökfüggvény sup-norma limesze polinomoknak a spektrumon.

A B előáll A polinomjainak norma limeszeként, így C kommutál B-vel is. Legyen

$$C^*(B,C) = \overline{\{P(B,C)|P \text{ polinom}\}}$$

egy kommutatív C^*-algebra, amiben benne van A és $B^2 = C^2$.

$$B^2 = C^2 \Rightarrow \widehat{B^2} = \widehat{C^2} \Rightarrow \widehat{B}^2 = \widehat{C}^2$$

$\widehat{B}, \widehat{C} \geq 0$ függvények $\sigma(A)$-n (spektrum szűkítés). Így $\widehat{B} = \widehat{C}$ is igaz (folytonos, pozitív függvények). Így vissza Genfand transzformálva $B = C$. □

4.17. Megjegyzés. *Ha $A \in \mathcal{B}(H)$ nem feltétlen normális, akkor $|A| := \sqrt{A^* \cdot A}$.*

4.1. Feladat. *Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$ önadjungált és $A \geq 0$. Biz be hogy A kompakt $\Leftrightarrow A^2$ kompakt.*

4.2. Feladat. *Adjunk meg olyan kompakt $B \in \mathcal{B}(H)$ operátrot hogy B^2 nem kompakt.*

4.3. Feladat. *Létezik-e ilyen önadjungáltra? És normálisra?*

4.18. Definíció (Parciális izometria)**.** *Az $U \in \mathcal{B}(H)$-t* parciális izometriá*nak hívjuk, ha létezik olyan M, N zárt alterek H-ban úgy, hogy*

$$U : M \mapsto N \text{ izometria és } U|_{M^\perp} = 0$$

4.19. Megjegyzés. *A fenti jelölésekkel $U^*U = P_M$, $UU^* = P_N$ továbbá $V \in \mathcal{B}(H)$ operátor parciális izometria $\Leftrightarrow VV^*$ és V^*V projekciók vagy $VV^*V = V$.*

4.20. Tétel (Virosztek Dániel)**.** *UU^* projekcióból kövtkezik, hogy U^*U is projekció és egyenlő vele. Elég az egyiket feltenni.*

4.21. Tétel (Poláris felbontás)**.** *Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$, akkor $\exists U \in \mathcal{B}(H)$ parciális izometria hogy*

$$A = U|A|$$

és U egyértelműen meghatározott a $\operatorname{Ker}(U) = \operatorname{Ker}(A)$ feltétel által.

Bizonyítás.
$$U : |A|x \mapsto Ax$$
jól definiált.
$$\||A|x\|^2 = \langle |A|x, |A|x \rangle = \left\langle |A|^2 x, x \right\rangle = \langle A^* Ax, x \rangle = \|Ax\|^2$$
Ebből $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(|A|)$. U lineáris izometria $U : \mathrm{Ran}(|A|) \mapsto \mathrm{Ran}(A)$. U egyértelműen kiterjeszthető izometriaként $\overline{\mathrm{Ran}(|A|)}$-ról $\overline{A}$-ra.

Azt is látjuk, hogy $\mathrm{Ker}(U) = \mathrm{Ran}(|A|)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$

U-t a $\mathrm{Ran}(|A|)^\perp$-on pedig 0-nak definiálom. $A = U|A|$ teljesül.

Egyértelműség: Tegyük fel, hogy van egy másik V. $\mathrm{Ker}(U) = \mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}(A)$. $U = V$ a $\overline{\mathrm{Ran}(|A|)}$-n képlet miatt, de ezon kívül meg $\mathrm{Ker}(A)$-ban vagyunk. □

4.22. Következmény. *Ha $A \in \mathcal{B}(H)$ invertálható, akkor $\exists U$ unitér úgy hogy $A = U|A|$.*

Bizonyítás. A invertálható $\Rightarrow$ $|A|$ is az (A^*A is). Így a parciális izometria is invertálható kell legyen ($\overline{\mathrm{Ran}(A)} = H$). Vagyis U unitér. És ekkor U egyértelmű (mindenhol). □

4.23. Állítás. *Ha $A \in \mathcal{B}(H)$ normális, akkor $\exists W \in \mathcal{B}(H)$ unitér, hogy $A = W|A|$.*

Bizonyítás.
$$U : \overline{\mathrm{Ran}(|A|)} \mapsto \overline{\mathrm{Ran}(A)}$$
Kimarad:
$$\overline{\mathrm{Ran}\,|A|}^\perp \mapsto \overline{\mathrm{Ran}(A)}^\perp$$
$$\mathrm{Ker}(|A|) \mapsto \underbrace{\mathrm{Ker}(A^*)}_{\text{normalitás}}$$
$$\mathrm{Ker}(A) \mapsto \mathrm{Ker}(A)$$
Így U izometria, vagyis unitér. □

4.24. Megjegyzés. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér. $g \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$*
$$M_g : \mathbb{L}^2(\mu) \mapsto \mathbb{L}^2(\mu)$$
$$M_g : f \mapsto gf$$
korlátos $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$ normával. Sőt a norma egyenlő is.

Bizonyítás. Ha $\|g\|_\infty = 0$ akkor világos.

Legyen $M < \|g\|_\infty$, $M < |g|$ teljesül pozitív mértékű halmazon. σ végesség miatt $\exists S \in \mathcal{A}$ hogy $0 < \mu(S) < \infty$, $S \subset \{M < |g|\}$

$$M^2\mu(S) = \int_S |g|^2 \leq \frac{\|M_g \chi_S\|^2}{\|\chi_S\|_2} \geq \frac{M^2\mu(S)}{\mu(S)} = M^2$$

□

$g \mapsto M_g$ ad egy $\mathbb{L}^\infty(\mu) \mapsto \mathcal{B}(\mathbb{L}^2(\mu))$ izometriát, C^*-algebra monomorfizmus (nem szürjektív, de injektív).

$$M_g^* = M_{\overline{g}}$$

Mi a poláris felbontása?

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} \frac{g(t)}{|g(t)|} & \text{ha } g(t) \neq 0 \\ 0 & \text{ha } g(t) = 0 \end{cases}$$

Erre

$$M_g = M_\varepsilon \cdot M_{|g|}$$

Ez-e *a* poláris felbontás?

$$\sqrt{(M_g)^* M_g} = \sqrt{(M_{\overline{g}}) M_g} = M_{|g|}$$

és az ε-os tag parciális izometria-e?

$\mathrm{Ker}(M_\varepsilon) = \mathrm{Ker}(M_g)$ és $M_\varepsilon M_\varepsilon^* M_\varepsilon = M_\varepsilon$. És

$$\|M_\varepsilon f\|^2 = \|f\|^2 \quad \mathrm{Ker}(M_\varepsilon)^\perp\text{-en}$$

4.25. Állítás. *Legyen $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$ normális operátorok. Legyen $S \in \mathcal{B}(H)$ invertálható, hogy*

$$T_1 = S T_2 S^{-1}$$

Akkor létezik U unitér, hogy $T_1 = U T_2 U^{-1}$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
T_1 S &= S T_2 && \text{3.12 tétel} \\
T_1^* S &= S T_2^* && /* \\
S^* T_1 &= T_2 S^* && / \cdot S \\
S^* T_1 S &= T_2 S^* S && \text{feltétel} \\
S^* S T_2 &= T_2 S^* S &&
\end{aligned}$$

Azaz

$$|S|^2 T_2 = T_2 |S|^2$$

Amivel T_2 felcserélhető, annak függvényével is, így $\sqrt{|S|^2}$-re:

$$|S| T_2 = T_2 |S|$$

Ebből

$$T_1 = \underbrace{U|S|}_{S} T_2 (\underbrace{U|S|}_{S})^{-1}$$

$$T_1 = U \underbrace{|S| T_2 |S|^{-1}}_{T_2} U^{-1}$$

□

Legyen $x \in A$ C^*-algebra beli. Ekkor

$$x = \underbrace{\frac{x + x^*}{2}}_{\text{önadj}} + i \cdot \underbrace{\frac{x - x^*}{2i}}_{\text{önadj}}$$

4.26. Tétel. *Minden C^*-algebrát az unitér elemei lineárisan generálnak.*

Bizonyítás. Elég olyan $x \in A$-t nézni, hogy $\|x\| \leq 1$ és x önadjungált

$$u := x + i\sqrt{1 - x^2}$$

$$u^* := x - i\sqrt{1 - x^2}$$

Ezt elvégezhetem és $x = \frac{u+u^*}{2}$ és

$$uu^* = (x - i\sqrt{1 - x^2})(x + i\sqrt{1 - x^2}) = x^2 + (1 - x^2) = 1$$

u^*u hasonlóan. □

5. Spektrál mértékek és kommutatív C^*-algebrák reprezentációi

5.1. Definíció (komplex mérték)**.** *$(X, \mathcal{A}, \mu)$, X tér, $\mathcal{A}$ σ-algebra. $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{C}$ olyan hogy:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. diszjunkt unióra összegződik a mérték (és átrendezhető)

Ekkor μ-t komplex mérték*nek nevezzük.*

5.2. Állítás. *Ha μ komplex mérték $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Akkor*

$$|\mu|(A) \coloneqq \sup \left\{ \sum_n |\mu(A_n)| \text{ hogy } \{A_n\} \subset \mathcal{A} \text{ véges partíciója } \mathcal{A}\text{-nak} \right\}$$

Egy szokásos mérték. A μ variációs *mértéke.*

Legyen $\|\mu\| \coloneqq |\mu|(X)$, ez norma az $(X, \mathcal{A})$-n élő összes komplex mértékek lineáris terén.

5.3. Megjegyzés. *Ha μ komplex mérték, akkor* Re, Im *valós mértékek.*

5.4. Tétel (Jordan felbontás)**.** *Ha μ valós előjeles mérték $(X, \mathcal{A})$-n, akkor létezik μ_1, μ_2 két pozitív valós mérték, hogy $\mu = \mu_1 - \mu_2$*

Bizonyítás. Legyen

$$\mu_1 \coloneqq \frac{|\mu| + \mu}{2}$$

$$\mu_2 \coloneqq \frac{|\mu| - \mu}{2}$$

□

5.5. Definíció (komplex mérték szerinti integrál)**.** *Legyen μ komplex mérték $(X, \mathcal{A})$, $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$ μ_i szokásos mértékekre. És legyen $f : X \mapsto \mathbb{C}$, ekkor:*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu_1 - \int f \,\mathrm{d}\mu_2 + i \left(\int f \,\mathrm{d}\mu_3 - \int f \,\mathrm{d}\mu_4 \right)$$

5.6. Megjegyzés. *Ez komplex lineáris f-ben és μ-ben is és*

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}|\mu|$$

5.7. Definíció. *Legyen X kompakt Hausdorff tér, $\mathcal{B}$ az X Borel halmazainak σ-algebrája. A μ komplex mérték* reguláris *$\mathcal{B}$-n, ha $|\mu|$ reguláris (Radon-féle).*

5.8. Tétel (Riesz)**.** *Legyen X kompakt Hausdorff tér, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra. Ekkor egy μ reguláris mértékre ($\mu \in M_r(X, \mathcal{B})$) és $f \in C(X)$ függvényre definiálhatjuk az*

$$F_\mu(f) := \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

értéket. Az íly módon definiált

$$F_\mu : f \mapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

leképezés egy lineáris funkcionál, azaz eleme $C(X)^*$-nek. És tekinthetjük az

$$F : \mu \mapsto F_\mu$$

leképezést, ami izometrikus, lineáris izomorfizmusa $M_r(X, \mathcal{B})$-nek $C(X)^*$-re. És pozitív funkcionálhoz pozitív mérték tartozik.

Megj: Stone–Čech kompaktifikált $((\ell_\infty)^*)$.

5.9. Definíció (Spektrál mérték)**.** *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és H Hilbert tér. Az $E : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}(H)$ függvény* spektrál mérték *ha*

1. *$E(B)$ projekció*
2. *$E(\emptyset) = 0$*
3. *Minden $x, y \in H$-ra $\mu_{x,y}(\bullet) := \langle E(\bullet)x, y \rangle$ egy komplex mérték.*
4. *$E(X) = I$*

Példa: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $\mathbb{L}^2(\mu)$ Hilbert tér.

$$E(B) := M_{\chi_B}$$

egy spektrál mérték.

M_{χ_B} mindig projekció, $\mu_{f,g} = \int_B f\overline{g} \, \mathrm{d}\mu$ egy komplex mérték az integrál σ-additivitása miatt.

5.10. Állítás. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mértékhető tér, H Hilbert tér és $E : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}(H)$ spektrál mérték. Ekkor*

1. *ha $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ és $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, akkor $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$*

2. ha $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ akkor $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1) \cdot E(B_2)$

3. ha $\{B_n\} \subset \mathcal{A}$ diszjunktak akkor $E(\bigcup_n B_n \cap B_2) = \sum_n E(B_n)$

Bizonyítás. (1) A komplex mértékek miatt

$$\langle E(B_1 \cup B_2)x, y\rangle = \langle E(B_1)x, y\rangle + \langle E(B_2)x, y\rangle$$

(2) Először lássuk, hogy diszjunkt halmazokra a projekciók merőlegesek. Ha P, Q és $P+Q$ is projekciók, akkor

$$(P+Q)^2 = P+Q$$

kell fennáljon, amiből $PQ = QP = 0$.

Legyen $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{A}$.

$$E(B) = E(A) + E(B \setminus A)$$

Mindkét oldalt szorzom $E(A)$-val és használom, hogy A diszjunkt $B \setminus A$-tól:

$$E(B)E(A) = \underbrace{E(A) \cdot E(A)}_{E(A)} + \underbrace{E(A) \cdot E(B \setminus A)}_{0}$$

Ebből általános A, B-re:

$$E(A) \cdot E(B) = \underbrace{E(A) \cdot \{E(B \setminus A)}_{0} + E(A \cap B)\} = E(A) \cdot E(A \cap B) = E(A \cap B)$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\|E(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)x - \sum_{k=1}^{N} E(B_k)x\|^2 = \\
&\|E(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)x\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \|E(B_k)x\|^2 - \underbrace{\left\langle E(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)x, \sum_{k=1}^{N} E(B_k)x \right\rangle}_{\sum \langle E(B_k)x, x\rangle} \\
&= \langle E(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)x, x\rangle - \sum_{k} \langle E(B_k)x, x\rangle = \mu_{x,x}(\cup B_n) - \sum_{k=1}^{N} \mu_{x,x}(B_k) \to 0
\end{aligned}$$

$\square$

5.11. Megjegyzés. *E spektrál mérték reguláris $\Leftrightarrow$ $\mu_{x,y}$ "árnyékmértékek" regulárisok.*

5.12. Tétel. *Ha $B : H \times H \to \mathbb{C}$ korlátos sesquilineáris forma, akkor $\exists! A \in \mathcal{B}(H)$ hogy*

$$B(x, y) = \langle Ax, y\rangle$$

és van norma becslés is.

5.13. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér. $E : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}(H)$ spektrál mérték, $f : X \mapsto \mathbb{C}$ korlátos, mérhető függvény. Ekkor $\exists! \int f \,\mathrm{d}E \in \mathcal{B}(H)$:*

$$\left\langle (\int f \,\mathrm{d}E)x, y \right\rangle = \int f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}$$

és $\| \int f \,\mathrm{d}E\| \leq \|f\|_{\sup}$

Bizonyítás. Legyen $B(x, y) := \int f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}$ $\forall x, y \in H$. Ez sesquilineáris és

$$|B(x, y)| = \left|\int f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}\right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}|\mu_{x,y}| \leq \|f\|_{\sup} \cdot |\mu_{x,y}|(X)$$

Mennyi a variációs mérték?

$$|\mu_{x,y}| = \sup\{\sum |\mu_{x,y}(A_n)|\}$$

$$\sum | \langle E(A_n)x, y\rangle | = \sum | \langle E(A_n)x, E(A_n)y\rangle | \leq \sum \|E(A_n)x\| \cdot \|E(A_n)y\|$$
$$\leq \sqrt{\sum \|E(A_n)x\|^2}\sqrt{\sum \|E(A_n)y\|^2} \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Emiatt $\exists! A \in \mathcal{B}(H)$ hogy $\langle Ax, y\rangle = B(x, y) = \int f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}$ és normája korlátos az f sup-normájával. $\square$

5.14. Állítás. *Az előző állítás jelölésivel az $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}E$ leképezés kontraktív *-algebra homomorfizmusa az X-en korlátos $\mathcal{A}$ mérhető függvények algebrájának $\mathcal{B}(H)$-ba.*

Bizonyítás.

$$\left\langle (\int f \,\mathrm{d}E)x, y \right\rangle = \int f \,\mathrm{d}\langle E(\bullet)x, y\rangle$$

Linearitás OK.

$$\left\langle (\int \chi_B \,\mathrm{d}E)x, y \right\rangle = \int \chi_B \,\mathrm{d}\langle E(\bullet)x, y\rangle = \langle E(B)x, y\rangle$$

Így látszik, hogy karakterisztikus függvényekre szépen viselkedik. És minden korlátos mérhető függvény egyenletesen approximálható egyszerű függvényekkel. Az integrálás pedig folytonos. Vagyis működik minden korlátos függvényre.

A * műveletet is tartja (konjugálás).

$$\left\langle \left(\int f\,\mathrm{d}E\right)^* x, y \right\rangle = \left\langle x, \left(\int f\,\mathrm{d}E\right) y \right\rangle = \overline{\left\langle \left(\int f\,\mathrm{d}E\right) y, x \right\rangle}$$

$$= \overline{\int f\,\mathrm{d}\langle \underbrace{E(\bullet)}_{\text{projekció}}\ y, x\rangle} = \overline{\int f\,\mathrm{d}\,\langle y, E(\bullet)x\rangle} = \int \overline{f}\,\mathrm{d}\,\underbrace{\langle E(\bullet)x, y\rangle}_{\mu_{x,y}}$$

□

5.15. Definíció. *Legyen A egy C^*-algebra, H Hilbert tér, $\Phi : A \mapsto \mathcal{B}(H)$ egy *-algebra homomorfizmus úgy hogy $\Phi(1) = I$. Ekkor Φ-t az A egy* *-algebra reprezentáció*jának hívjuk.*

5.16. Tétel. *Legyen A, B két C^*-algebra, $\Phi : A \mapsto B$ egy *-algebra homomorfizmus és $\Phi(1) = 1$. Ekkor Φ kontraktív. És az hogy izometria, az ekvivalens azzal, hogy Φ injektív.*

Bizonyítás. x önadjungált, $\Phi : C^*(x) \mapsto \Phi(C^*(x)) \subset \overline{\Phi(C^*(x))} =: \mathcal{C}$ ami egy kommutatív C^*-algebra.

Tetszőleges $\varphi \in \widehat{\mathcal{C}}$-ra $\varphi \circ \Phi$ karakter $C^*(x)$-en. Ezért $\varphi(\Phi(x)) \in \sigma(x)$ (karakter spektrumba képez, karakterszűkítés tétel).

Így $|\varphi(\Phi(x))| \leq \|x\| \Rightarrow \underbrace{\sup_{\varphi\in\widehat{\mathcal{C}}} |\varphi(\Phi(x))|}_{r(\Phi(x))=\|\Phi(x)\|} \leq \|x\|$

Vagyis önadjungáltra $\|\Phi(x)\| \leq \|x\|$. Tetszőlegesre

$$\underbrace{\Phi(x^*x)}_{\Phi(x)^*\Phi(x)} \leq \|x^*x\| = \|x\|^2$$

Tegyük fel, hogy most x önadjungált és Φ injektív. x önadjungált, pozitív, $\|x\| = 1$. Indirekt tegyük fel, hogy $\|\Phi(x)\| < 1$.

Vegyük azt az $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ függvényt, ami a $[0, \|\Phi(x)\|]$-n 0 és lineáris $[\|\Phi(x)\|, 1]$-en.

Erre $f(\Phi(x)) = 0$. És $f(\Phi(x)) = \Phi(f(x))$ (polinomokkal approximálható az f). De akkor injektivitás miatt $f(x) = 0$ vagyis $f \equiv 0$ az x spektrumán. Ellentmondás.

Ezért $\|\Phi(x)\| = 1$.

Tetszőleges $\|x\| = 1$-re. Ekkor x^*x pozitív és normája egy. Erre

$$\| \underbrace{\Phi(x^*x)}_{\Phi(x)^*\Phi(x)} \| = 1$$

$\square$

5.17. Tétel. *X kompakt Hausdorff tér, H Hilbert tér, E reguláris spektrálmérték X Borel halmazain ($\mathcal{B}$). Akkor $f \in C(X)$-re*

$$f \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}E$$

egy *-reprezentációja $C(X)$-nek $\mathcal{B}(H)$-n, melynek értékkészletével pontosan akkor felcserélhető egy operátor, ha felcserélhető E értékkészletével.

Bizonyítás. Ez egy * reprezentáció, ez trivi. $1 \mapsto I$:

$$\int 1 \,\mathrm{d}E = \int \chi_X \,\mathrm{d}E = E(X) = I$$

Mi a helyzet a felcserélhetőséggel?

$$A \cdot \int f \,\mathrm{d}E = (\int f \,\mathrm{d}E)A \quad \forall f \in C(X), x, y \in H$$

skalarizálom:

$$\left\langle (\int f \,\mathrm{d}E)x, A^*y \right\rangle = \left\langle (\int f \,\mathrm{d}E)Ax, y \right\rangle$$

$$\int f \,\mathrm{d}\mu_{x,A^*y} = \int f \,\mathrm{d}\mu_{Ax,y} \quad \forall f \in C(X), x, y \in H$$

Két mérték akkor indukálja ugyanazt a funkcionált (minden folytonos függvényen), ha a mértékek megegyeznek (Riesz reprezentáció). Így

$$\mu_{x,A^*y} = \mu_{Ax,y}$$

$$\langle E(B)x, A^*y \rangle = \langle E(B)Ax, y \rangle \quad \forall B \in \mathcal{B}, x, y \in H$$

Vagyis E értékkészlete felcserélhető A-val. $\square$

Feladat: X kompakt Hausdorff, H Hilbert, e_n ortonormált bázis H-n. x_n sorozat X-ben, $f \in C(X)$

$$\Phi(f)e_n := f(x_n)e_n$$

Ekkor Φ egy *-reprezentáció. Mi a spektrál mértéke?

5.18. Tétel. *Legyen A kommutatív C^*-algebra, H Hilbert tér, $\Phi : A \mapsto \mathcal{B}(H)$ egy *-reprezentáció. Ekkor $\exists! E$ reguláris spektrálmérték az $\widehat{A}$ Borel halmazain, hogy*

$$\Phi(x) = \int \widehat{x} \, \mathrm{d}E \quad (x \in A)$$

Bizonyítás. $x \mapsto \widehat{x}$ Gelfand trafó egy izometrikus *-izomorfizmusa A-nak $C(\widehat{A})$-ra. Ezért elég az $A = C(X)$ esettel foglalkozni, ahol X kompakt Hausdorff tér, egyébként kicserélhetem A-t $C(\widehat{A})$-ra.

Akkor legyen $\Phi : C(X) \mapsto \mathcal{B}(H)$ egy *-reprezentáció. $\forall x, y \in H$-ra tekintsük a következőt

$$f \mapsto \langle \Phi(f)x, y \rangle$$

Ez egy korlátos lineáris funkcionál, így a Riesz reprezentáció miatt létezik $m_{x,y}$ reguáris Borel mérték X-en:

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int f \, \mathrm{d}m_{x,y}$$

Sőt $m_{x,x}$ egy pozitív (rendes valós) mérték, mert a funkcionál pozitív függvényre pozitív: $f = |g|^2 = \overline{g} \cdot g$-re

$$\langle \Phi(f)x, x \rangle = \langle \Phi(g)^* \Phi(g)x, x \rangle = \langle \Phi(g)x, \Phi(g)x \rangle \geq 0$$

Rögzítem $B \in \mathcal{B}(X)$ halmazt és

$$M_B(x, y) := m_{x,y}(B) = \int f \, \mathrm{d}m_{x,y} \quad x, y \in H$$

ami

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle$$

Ez lineáris első változóban, konjugált lineáris a másodikban. $M_B(\bullet, \bullet)$ egy korlátos sesquilineáris forma. korlátosság:

$$|M_B(x, y)| = |m_{x,y}(B)| \leq |m_{x,y}|(B) \leq |m_{x,y}|(X) = \|m_{x,y}\| \underbrace{=}_{\text{Riesz}} \|f \mapsto \langle \Phi(f)x, y \rangle \|$$

De Φ kontraktív

$$\leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Így minden B Borel halmazhoz $\exists E(B) \in \mathcal{B}(H)$ operátor hogy

$$M_B(x, y) = \langle E(B)x, y \rangle$$

és $\|E(B)\| \leq 1$. Kell: E egy spektrál mérték.

$E(B)$ projekció?

$$\langle E(B)x, x\rangle \geq 0$$

Így $E(B)$ önadjungált (mert pozitív). Megmutatjuk:

$$E(B \cap B') = E(B)E(B')$$

Ez elég ahhoz hogy $E(B)$ projekció. Ez meg a Φ multiplikativitása miatt igaz.

$$\langle \Phi(fg)x, y\rangle = \langle \Phi(g)\Phi(f)x, y\rangle = \langle \Phi(f)x, \Phi(g)^* y\rangle$$

Az első tag:

$$\int gf \,\mathrm{d}m_{x,y} = \int f \quad \underbrace{g \,\mathrm{d}m_{x,y}}_{\text{komplex mérték}}$$

Az utolsó tag:

$$\int f \,\mathrm{d}m_{x,\Phi(g)^* y}$$

Riesz miatt a mértékek megegyeznek:

$$m_{x,\Phi(g)^* y}(B) = \int_B g \,\mathrm{d}m_{x,y} = \int g \underbrace{\chi_B \,\mathrm{d}m_{x,y}} \quad \forall B$$

Az első tag

$$\langle E(B)x, \Phi(g)^* y\rangle = \langle \Phi(g)E(B)x, y\rangle = \int g \underbrace{\mathrm{d}m_{E(B)x,y}}$$

Így megint Riesz miatt minden B'-re

$$m_{x,y}(B \cap B') = m_{E(B)x,y}(B') = \langle E(B')E(B)x, y\rangle \quad \forall x, y$$

Ez jó. Nézzük még meg $E(X)$-et.

$$\langle E(X)x, y\rangle = m_{x,y}(X) = \int 1 \,\mathrm{d}m_{x,y} = \langle \Phi(1)x, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Ezért $E(X) = I$ és így E egy spektrálmérték (az árnyékmértékek biztosan jó mértékek, mert azokból konstruáltuk E-t).

E egyértelmű, mert skalarizáltjai (árnyékmértékei) egyértelműek a Riesz miatt.

□

5.1. Feladat. *Kommutatív C^*-algebra minden irreducibilis *-reprezentációja (aminek csak triviális invariáns zárt alterei vannak) egy dimenziós.*

Így látszik, hogy pont a karaterek az irreducibilis reprezentációk.

5.19. Tétel (Spektráltétel)**.** *Ilyen formában Neumanntól származik, de a bizonyítás más volt.*

Legyen $N \in \mathcal{B}(H)$ normális operátor, Ekkor $\exists! E$ spektrálmérték a $\sigma(N)$ Borel halmazain, hogy

$$N = \int_{\sigma(N)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$$

Az identikus függvégy integrálja.

Továbbá T felcserélhető N-el $\Leftrightarrow$ T felcserálhető E értékkészletével.

Bizonyítás. Legyen $\Phi : C(\sigma(N)) \mapsto \mathcal{B}(H)$ a következő:

$$\Phi(f) := f(N)$$

a folytonos függvénykalkukus. Ez egy *-reprezentáció. Ehhoz létezik egyértelműen olyan E reguláris spektrálmérték $\sigma(N)$-en, hogy

$$f(N) = \Phi(f) = \int_{\sigma(N)} f \, \mathrm{d}E$$

(kompakt metrikus téren minden Borel mérték reguláris, legalábbis szerintünk)

Így

$$N = \int_{\sigma(N)} \mathrm{id} \; \mathrm{d}E$$

Egyértelműség: ha lenne egy másik E' (reguáris) spektrálmérték $\sigma(N)$-en, hogy

$$\int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda) = \int \lambda \, \mathrm{d}E'(\lambda)$$

A két reprezentáció megegyezik az identikus függvényen, de akkor már az összes polinomon, akkor a folytonos függvényeken is megegyeznek. Így egyenlőek kell legyenek.

Felcserélhetőség: ha T felcserélhető N-el, akkor N^*-al is, de ezek generálják $C^*(N)$-et, ami az $f(N)$-eket generálja ($f \in C(\sigma(N))$-re). □

5.20. Következmény. *Ha* $\dim H \geq 2$*, akkor minden normális operátornak létezik nem triviális (nem a teljes tér és nem a 0 altér) invariáns altere.*

Bizonyítás. E triviális mérték: $E(B) = 0$ vagy I, akkor N egy skalár mátrix, akkor persze van invariáns altér.

Ha E nem triviális, akkor $\exists B_0$ hogy $E(B_0)$ nem triviális projekció. Ekkor $NE(B_0) = E(B_0)N$, így $\operatorname{Ran}(E(B_0))$ invariáns altere N-nek. $\square$

5.21. Megjegyzés. *N legyen egy korlátos, normális operátor H Hilbert téren, E spektrál mértékkel. $U \subset \sigma(N)$ nem üres (relatíve) nyílt halmaz. Akkor*

$$E(U) \neq 0$$

Bizonyítás. Legyen f olyan folytonos, hogy $f(z) \leq 1$ $z \in U$-ra és 0 az U-n kívül, de nem konstans 0 függvény.

$$\int \chi_U \,\mathrm{d}E \geq \int f \,\mathrm{d}E \geq 0$$

Ha egyenlőség állna fent, akkor $f(N)$ nulla operátor lenne, ami azt jelenti, hogy $f \equiv 0$ az U halmazon $\lightning$. $\square$

5.22. Megjegyzés. *A holomorf függvénykalkukus megegyezik a folytonossal, ha el lehet végezni.*

5.23. Megjegyzés. *A folytonos függvénykalkukus injektív, de a spektrálmérték szerinti integrál (korlátos függvénykalkukus) nem.*

5.1. Hasznos számítások

5.24. Állítás. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy σ-véges mértéktér. $g \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$. $M_g : \mathbb{L}^2(\mu) \mapsto \mathbb{L}^2(\mu)$ szorzás operátor.*

$$\sigma(M_g) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mu(|g - \lambda| < \varepsilon) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}$$

Lényeges értékkészlet.

Bizonyítás. Elég belátni hogy $0 \in \sigma(M_g) \Leftrightarrow \mu(|g| < \varepsilon) > 0$ $(\forall \varepsilon > 0)$.

Vissza irány: $\forall n$

$$\mu(|g| < \frac{1}{n}) > 0$$

Így $\exists S_n \in \mathcal{A}$ hogy $0 < \mu(S_n) < \infty$ és S_n-en $|g| < \frac{1}{n}$.

$$\frac{\|M_g \chi_{S_n}\|^2}{\|\chi_{S_n}\|^2} = \frac{\int_{S_n} |g|^2}{\mu(S_n)} \leq \frac{1}{n}$$

Így M_g nem alulról korlátos $\Rightarrow$ M_g nem invertálható, így $0 \in \sigma(M_g)$.

Előre irány: ha $\exists \varepsilon > 0$ hogy

$$\mu(|g| < \varepsilon) = 0$$

$f \in \mathbb{L}^2(\mu)$-re:

$$\|M_g f\|^2 = \int |g|^2 |f|^2 \,\mathrm{d}\mu \geq \varepsilon^2 \int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu = \varepsilon^2 \|f\|^2$$

Így M_g alulról korlátos (és normális), így M_g invertálható. $\square$

Mi M_g spektrál-előállítása?

5.25. Állítás. *M_g spektrál mértéke:*

$$E : B \mapsto M_{\chi_{g^{-1}(B)}}$$

Bizonyítás. A jobb oldal

$$= M_{\chi_{g^{-1}(B \cap \sigma(M_g))}}$$

Mert a $\sigma(M_g) = g(X)$ 0-mértéktől eltekintve. $\forall f, f' \in \mathbb{L}^2(\mu)$-re definiáljuk

$$\langle E(\bullet) f, f' \rangle : B \mapsto \int_{g^{-1}(B \cap \sigma(M_g))} f \overline{f'} \,\mathrm{d}\mu$$

spektrál mértéket, ezt nevezzük el E-vel. Kell:

$$M_g \overbrace{=}^{?} \int \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda)$$

$$\int g \cdot f \cdot \overline{f'} \,\mathrm{d}\mu \overbrace{=}^{?} \int_{\sigma(M_g)} \lambda \,\mathrm{d}\,\langle E(\bullet) f, f' \rangle =$$

…ki kell írni

??

$\nu(S) := \int_S |f|^2 \,\mathrm{d}\mu$

$$= \int_{g^{-1}(B)} |f|^2 \,\mathrm{d}\mu = \nu(g^{-1}(B)) = \nu_g(B)$$

$\square$

5.26. Állítás. *Legyen* $S : \ell^2(\mathbb{Z}) \mapsto \ell^2(\mathbb{Z})$ *jobbra tolás:*

$$S((x_n)) = (x_{n-1})$$

Akkor $\sigma(S) = \mathbb{T}$ *a komplex egységkör.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\ell^2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ a Fourier sorfejtéssel.

Akkor M_γ az eltolás megfelelője $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$-n, ahol

$$\gamma : t \mapsto e^{it}$$

Fourier sorfejtsünk.

$$\int_0^{2\pi} e^{it} f(t) \overline{e^{int}} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i(n-1)t} \, \mathrm{d}t$$

Ha a Fourier forfejtés az U operátor, akkor

$$S = U M_\gamma U^*$$

és

$$\sigma(M_\gamma) = \mathbb{T}$$

□

5.27. Állítás. $S : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

$$f(\bullet) \mapsto f(\bullet - 1)$$

Spektruma ugyancsak $\mathbb{T}$*.*

Bizonyítás. Fourier transzformálunk

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} \, \mathrm{d}t$$

Plancherel tétel azt mondja hogy ez unitér trafó. Frekvencia térben az operátorunk egy szorzás e^{ix} függvénnyel. □

5.28. Tétel. *Legyen* $N \in \mathcal{B}(H)$ *normális,* E *hozzá tartozó spektrálmérték.* f *korlátos Borel függvény* $\sigma(N)$*-en. Ekkor*

$$\lambda \in \sigma(f(N)) \Leftrightarrow E(\{|f - \lambda| < \varepsilon\}) \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

És λ *saját érték* $\Leftrightarrow E(\{f = \lambda\}) \neq 0$ *és* $E(\{f = \lambda\})$ *a saját altérre vetítés.*

5.29. Következmény (Spektrálleképezési tétel a korlátos, Borel-mérhető kalkulusra)**.** *Előző jelölésekkel*

$$\sigma(f(N)) \subset \overline{f(\sigma(N))}$$

És lehet szigorú tartalmazás.

5.30. Tétel. *N normális, f korlátos Borel $\sigma(N)$-en, g folytonos az origó középpontú $\|f\|_{\sup}$ sugarú zárt körlapon. Akkor*

$$g(f(N)) = (g \circ f)(N)$$

Bizonyítás. Úgy kell bizonyítani, mint eddig, csak most g nagyobb tartományon van definiálva, nem csak a spektrumon. □

5.31. Tétel. *Legyen $U \in \mathcal{B}(H)$ unitér operátor. Ekkor $\exists T \in \mathcal{B}(H)$ önadjungált:*

$$U = e^{iT}$$

Bizonyítás. Legyen $\varphi(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi)$. $\varphi : [0, 2\pi) \mapsto S^1$ bijektív. φ^{-1} nem folytonos, de Borel. Sőt, φ^{-1} valós értékű:

$$\underbrace{\varphi^{-1}(U)}_{T:=} \in \mathcal{B}(H)$$

Ez jó lesz. □

5.32. Tétel. *Legyen $T \in \mathcal{B}(H)$ normális operátor. Ekkor ekvivalensek:*

1. *T kompakt*
2. *$\sigma(T)$ megszámlálható és egyetlen lehetséges torlódási pontja* 0
3. $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda I) < \infty$ $\forall \lambda \neq 0$

Bizonyítás. (1) $\Leftrightarrow$ (2):

A $\Rightarrow$ irány Riesz tétele.

A $\Leftarrow$ irányhoz:

$$N = \int_{\sigma(N)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\sigma(N) \cap \{z \mid |z| \geq \varepsilon\}} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$$

Ehhez kell:

$$\left\| \int g \, \mathrm{d}E \right\| \leq \|g\|_{\sup}$$

De (2) miatt az integrálás tartománya véges, az integrál szumma lesz.

$$\sum_{\lambda \in \sigma(N), |\lambda| \geq \varepsilon} \lambda E(\{\lambda\})$$

Így N-et véges rangúakkal approximáltam, így kompakt. $\square$

5.33. Tétel. *Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$ normális. A kompakt $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ran}(A)$ nem tartalmaz ∞-dimenziós zárt alteret.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$

A kompakt, tegyük fel, hogy $M \subset \operatorname{Ran}(A)$ végtelen dimenziós, zárt altér, P_M merőleges vetítés M-re. $P_M A$ értékkészlete M, $P_M A$ kompakt. $P_M A|_{\operatorname{Ker}(P_M A)^\perp}$ kompakt bijektív M-re. Ez oda-vissza folytonos (Banach tétele korlátos inverzről). Vagyis $\exists T : M' \mapsto M$ bijektív korlátos lineáris operátor. $T^{-1}T = \mathrm{id}_M$, ez kompakt kell legyen, mert kompakt szorozva folytonossal, de végtelen dimenzióban nem kompakt az identitás operátor $\lightning$

$\Leftarrow$

5.34. Lemma. *Ha $B, C \in \mathcal{B}(H)$ és $BB^* \leq kCC^*$ valamilyen k-ra. Ekkor létezik $Y \in \mathcal{B}(H)$ hogy $B = CY$*

Speciel $\operatorname{Ran}(B) \subset \operatorname{Ran}(C)$

Bizonyítás.

$$Y : C^*y \mapsto B^*y$$

$$C^*y = 0 \Rightarrow 0 = \|C^*y\|^2 = \langle C^*y, C^*y\rangle = \langle CC^*y, y\rangle$$

$$\Rightarrow \langle BB^*y, y\rangle = 0 \Rightarrow B^*y = 0$$

Y Jól definiált operátor. $\|B^*y\|^2 \leq k\|C^*y\|^2$ miatt korlátos lin.traf. Kiterjeszthető korlátosként $\overline{\operatorname{Ran}(C^*)}$-ra, majd az egész H-ra.

$$YC^* = B^* \Rightarrow B = CY^*$$

$\square$

$$A = \int \lambda \, \mathrm{d}E$$

??

$\square$

5.35. Megjegyzés. *Tetszőleges H Hilbert térre $C(H) := \{A \in \mathcal{B}(H) | A \text{ kompakt}\}$ zárt ideál $\mathcal{B}(H)$-ban.*

5.36. Tétel (Calkin)**.** *Szeparábilis H esetén $C(H)$ az egyetlen nem triviális zárt ideál $\mathcal{B}(H)$-ban.*

Bizonyítás. Legyen $I \subset \mathcal{B}(H)$ nem triviális, zárt ideál. $T \neq 0$ véges rangú operátorok mind I-ben benne kell legyenek

miért biztos, hogy az összes véges rangú benne van?

Ekkor a kompaktak a zártság miatt szintén I-ben vannak: $C(H) \subseteq I$.

Ha lenne egy olyan $A \in I$ hogy $A \notin C(H)$ akkor $\exists M$ egy ∞ dimenziós altér, hogy $M \subset \operatorname{Ran}(A)$. $P_M A$ értékkészlete M. A szeparabilitás miatt létezik olyan U parciális izometria H-n, hogy a kezdeti tér M és az értékkészlet H (minden végtelen dimenziós altér felfújható az egész térré). Ekkor $U P_M A \in I$ és szürjektív, ezért létezik jobb inverze $\Rightarrow \mathrm{id} \in I$ $\lightning$

□

5.37. Definíció (Calkin algebra)**.** *H szeparábilis Hilbert tér. A* Calkin algebra*:*

$$\mathcal{B}(H)/C(H)$$

5.38. Állítás. *H szeparábilis Hilbert téren a Calkin algebra egyszerű.*

Bizonyítás. 5.36 tétel. □

Sokáig kérdés volt, hogy ennek C^*-automorfizmusai mind belsők-e:

$$X \mapsto UXU^*$$

ahol U unitér?

Ez független ZFC-től! A kontinuum hipotézissel van külső automorfizmusa (1997), azzal ellenkezőt feltéve minden automorfizmus belső (2010).

1970 körül bebizonyították, hogy egyszerű C^*-albegra minden deriváció ja belső. Ez kevésbé nehéz.

6. Approximációs tételek

Az erős operátor toplológiára vonatkozó két approximációs tétel.

6.1. Definíció. *Legyen H Hilbert tér. Tekintsük az*

$$p_x : \mathcal{B}(H) \mapsto \mathbb{C}$$

$$p_x(A) := \|Ax\|$$

illetve

$$p_{x,y} : \mathcal{B}(H) \mapsto \mathbb{C}$$

$$p_{x,y}(A) = |\langle Ax, x\rangle|$$

$x, y \in H$, $A \in \mathcal{B}(H)$ szeminormák által definiált topológiákat. Mint függvényrendszer által indukált topológiákat $\mathcal{B}(H)$-n.

Rendre erős *ill.* gyenge operátortopológia.

Konvergenciája pontosan az $A \xrightarrow{s} B \Leftrightarrow \|Ax - Bx\| \to 0 \; \forall x \in H$ és skalárszorzatra hasonlóan.

6.2. Megjegyzés. *Operátor normábani tartás $\Rightarrow$ erős operátor topológiában tartás $\Rightarrow$ gyenge operátor topológiában tartás.*

6.3. Definíció (általánosított sorozat)**.** *Legyen Γ irányított halmaz: rendezett halmaz, hogy minden $\alpha, \beta \in \Gamma$-ra $\exists \gamma \in \Gamma$ hogy $\alpha, \beta \leq \gamma$.*

Ekkor $x_\Gamma \mapsto X$ függvény egy általánosított sorozat.

6.1. Feladat (Vigier-tétel)**.** *Legyen H Hilbert tér, $A_\alpha \in \mathcal{B}(H)$ önadjungált operátorok általánosított sorozata, ami felülről korlátos (van legnagyobb elem). Ekkor A_α erősen konvergál egy $A \in \mathcal{B}(H)$-hoz.*

6.4. Tétel. *Legyen f lineáris funkcionál $\mathcal{B}(H)$-n. A következők ekvivalensek:*

1. *f erősen folytonos.*

2. *f gyengén folytonos.*

3. *$\exists x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n \in H$ hogy $f(A) = \sum_{k=1}^{n} \langle Ax_k, y_k\rangle$*

Bizonyítás. (2)⇒(1) világos

(3)⇒(2) világos

(1)⇒(3):

Legyen f erősen folytonos. Ekkor $\exists x_1 \dots x_n \in H, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n > 0$ hogy

$$\|Ax_1\| < \varepsilon_1 \dots \|Ax_n\| < \varepsilon_n \Rightarrow |f(A)| < 1$$

ez a tulajdonság hogyan jön ez erősen folytonossából?

És $\exists \varepsilon > 0$ hogy

$$\sum_k \|Ax_k\|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |f(A)| < \varepsilon$$

és

$$(Ax_1, \dots Ax_n) \mapsto f(A)$$

jól definiált, mert egy másik ilyen $(Bx_1, \dots Bx_n)$ rendszerre

$$((A-B)x_1 \dots (A-B)x_n) = 0 \Rightarrow |f(A-B)| = 0$$

Ezek lineáris alteret alkotnak H^n-ban, ha A-t futtatom $\mathcal{B}(H)$-n.

Ez egy funkcionál H^n egy részhalmazán, korlátos. Hahn-Banach-al kiterjeszthetem H^n-re, ami Hilbert tér.

Riesz miatt $\exists y_1 \dots y_n \in H$ hogy

$$f(A) = \left\langle \begin{pmatrix} Ax_1 \\ \vdots \\ Ax_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

□

6.5. Következmény. *Ha $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(H)$ konvex halmaz, akkor $\mathcal{C}$ erős lezártja egyenlő $\mathcal{C}$ gyenge lezártjával.*

Bizonyítás. Általában lokálisan konvex topológikus vektortéren $\mathcal{C}$ konvex halmazra.

$$\overline{\mathcal{C}} = \text{ azon zárt félsíkok metszete, amiben } \mathcal{C} \text{ benne van}$$

Félsík: $\{\mathrm{Re}(f) \le c\}$ egy $f \in \mathcal{B}(H)^*$-ra és c konstansra.

Ez a Hahn-Banach tétel elválasztási alakja miatt van. Ezek után látszik hogy ugyanazok a lineáris funkcionálok mindkét topológiában, így a kettő ugyan az. □

6.6. Definíció. *Ha* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$*, akkor* $\mathcal{A}' = \{T \in \mathcal{B}(H) | TA = AT \ \forall A \in \mathcal{A}\}$ *az* $\mathcal{A}$ kommutánsa.

6.7. Tétel (von Neumann dupla kommutáns)**.** *Legyen* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ *az identitást tartalmazó rész* **-algebra. Ekkor*

1. $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}''$
2. *mind erős, mind gyenge lezártra.*

És az alábbiak ekvivalensek

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$
2. $\mathcal{A}$ *erősen zárt*
3. $\mathcal{A}$ *gyengén zárt*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\mathcal{A}'$ egy rész *-algebra, aminek I eleme. És $\mathcal{A}'$ zárt mind a gyenge, mind az erős operátor topológiára nézve.

És $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$ is olyan rész *-algebra, hogy zárt és I benne van.

Kell: $\mathcal{A}$ sűrű $\mathcal{A}''$-ban, vagyis $T \in \mathcal{A}'' \Rightarrow T \in \overline{\mathcal{A}}$.

Legyen $x \in H$ tetsz.

$$M := \overline{\mathcal{A}x} \text{ zárt altér } H\text{-ban}$$

M invariáns altere is $\mathcal{A}$-nak. P_M a rá való projekció.

$$P_M A P_M = A P_M \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$P_M A^* P_M = A^* P_M \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Ebből

$$A P_M = P_M A \Rightarrow P_M \in \mathcal{A}'$$

$$T P_M = P_M T \Rightarrow Tx = P_M Tx \in M$$

$\exists A_n \in \mathcal{A}$ hogy $A_n x \to Tx$

$\varphi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H^n)$ diagonális beágyazás, ekkor

$$\varphi(\mathcal{A}'') = \varphi(A)''$$

Ez belátható.

És mivel $T \in \mathcal{A}'' \Rightarrow \varphi(T) \in \varphi(A'') = \varphi(A)''$. Alkalmazva az előzőket, jön hogy tetszőleges $(x_1 \dots x_n) \in H^n$ vektor esetén $\exists A_k \in \mathcal{A}$ hogy

$$\begin{pmatrix} A_k & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} T & & \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vagyis $A_k x_i \to T x_i \Rightarrow T \in \overline{\mathcal{A}}$.

□

6.8. Definíció. *Az előző tétel három feltétel bármelyikét teljesítő, identitást tartalmazó rész* **-algebráját* $\mathcal{B}(H)$*-nak* Neumann algebrának *nevezzük.*

Ez egyben C^*-algebra is (ha gyenge zárt, akkor erős és norma zárt is).

6.2. Feladat. *Adjunk meg olyan rész* C^**-algebráját* $\mathcal{B}(H)$*-nak, ami nem Neumann algebra.*

6.9. Megjegyzés.

- $\mathcal{B}(H)$ *egy Neumann algebra.*
- $(\mathbb{C}I)' = \mathcal{B}(H)$
- $\mathbb{C}I = (\mathbb{C}I)'' = \mathcal{B}(H)'$

6.10. Tétel. *Legyen* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ *Neumann algebra. Ekkor*

1. $\mathcal{A}$ *tartalmazza* $\forall A \in \mathcal{A}$ *operátornak poláris felbontásának tényezőit*
2. $\mathcal{A}$ *tartalmazza tetszőleges elemének értékkészletének lezártjára való projekciókat.*

Bizonyítás. (1) $A \in \mathcal{A}$, $A = U|A|$. Legyen $V \in \mathcal{A}'$ unitér.

$$A = VUV^*|A|$$

mert

$$A = VAV^* = VU|A|V^*$$

És V felcserélhető $|A|$-val is. Így $A = VUV^*|A|$. És VUV^* is parciális izometria és magja egyenlő U magjával:

$$VUV^*x = 0 \Leftrightarrow UV^*x = 0 \Leftrightarrow AV^*x = 0 \Leftrightarrow V^*Ax = 0 \Leftarrow Ax = 0$$

Ezért a poláris felbontás egyértelműsége miatt $U = VUV^*$, vagyis $VU = UV$, és $\mathcal{A}'$ egy C^*-algebra, amit az unitér operátorai lineárisan generálnak. Ezért U felcserélhető a teljes $\mathcal{A}'$ algebrával, így $U \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

És $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}$.

(2) könnyű □

6.11. Tétel. *Neumann algebra normális elemének a spektrál mértékének értékkészlete is az algebrában vannak.*

Neumann algebra megegyezik a projekcióinak lineáris burkának lezártjával (operátor normában).

Bizonyítás. Legyen $N \in \mathcal{A}$ normális, E spektrál mértékkel. $T \in \mathcal{A}' \Rightarrow TN = NT \Rightarrow TE(B) = E(B)T$ minden $B \subset \sigma(N)$ Borel halmazra (spektrál tétel).

Így $E(B) \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

A második állítás pedig világos: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \frac{A+A^*}{2}$ és $\frac{A-A^*}{2i}$ önadjungáltak és $\in \mathcal{A}$. Ezek approximálhatóak

$$\sum \lambda_i E(\bullet)$$

elemekkel, ahol az $E(\bullet)$ projekciók mind $\mathcal{A}$-ban vannak. □

6.3. Feladat. *Mondjunk olyan normális operátot, aminek spektrál projekciói nincsenek mind benne az ő álta generált C^*-algebrában.*

6.12. Megjegyzés. *Az operátor norma topológiában a műveletek mind folytonosak ($+$, *, szorzás). Mi a helyzet erős és gyengében?*

Legyen $A_\alpha, A \in \mathcal{B}(H)$, $A_\alpha \xrightarrow{w} A$, akkor az adjungáltjuk is. De erősen nem.

Példa: $\ell^2(\mathbb{N})$-en nem erősen folytonos az adjungálás. Legyen

$$S : e_n \mapsto e_{n+1}$$

Erre $S^n \stackrel{s}{\not\to} 0$, de $(S^n)^* = (S^*)^n$ tart erősen nullába.

6.13. Megjegyzés. *A szorzás nem folyotnos sem gyengében, sem erősben.*

Példa gyengére: $(S^*)^n \xrightarrow{w} 0$, $(S^n)^* \xrightarrow{w} 0$, így $S^n \xrightarrow{w} 0$. Így $((S^n)^*)S^n = I \not\xrightarrow{w} 0$.

Erősre ellenpélda: $0 \in \overline{\{\sqrt{n}e_n | n \in \mathbb{N}\}}^w$ ahol e_n ortonormált bázis a H szeparábilis Hilbert téren.

$y_1 \dots y_k$ adott vektorokhoz és $\varepsilon > 0$-hoz $\exists n \in \mathbb{N}$ hogy $|\langle \sqrt{n}e_n, y_l \rangle| < \varepsilon\ \forall l = 1 \dots k$.

Indirekt tegyük fel hogy nem igaz, azaz minden n-re valamelyik y_l-re $|\langle \sqrt{n}e_n, y_l \rangle| \geq \varepsilon$. Ekkor

$$|\langle e_n, y_l \rangle| \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$\|y_1\|^2 + \ldots + \|y_k\|^2 = \sum_n \sum_l |\langle e_n, y_l \rangle|^2 \geq \sum_n \frac{\varepsilon^2}{n} = \infty \quad \lightning$$

Vagyis létezik n_λ részsorozat, hogy $\sqrt{n_\lambda}e_{n_\lambda} \xrightarrow{w} 0$. Ekkor az $A_\lambda = \sqrt{n_\lambda}e_{n_\lambda} \otimes e_{n_\lambda} \xrightarrow{s} 0$, mert

$$\|A_\lambda x\| = \|\langle x, e_{n_\lambda} \rangle \sqrt{n_\lambda}e_{n_\lambda}\| = \|\sqrt{n_\lambda}\langle e_{n_\lambda}, y \rangle\| \to 0 \quad \forall x$$

és

$$A_\lambda^2 = n_\lambda e_{n_\lambda} \otimes e_{n_\lambda}$$

De $x = \sum \frac{1}{n} e_n$ vektorra

$$A_\lambda^2 x = \langle x, e_{n_\lambda} \rangle n_\lambda e_{n_\lambda} = e_{n_\lambda} \not\to 0 \text{ normában}$$

6.14. Tétel. *Az adjungálás erősen folytonos a normális operátorok halmazán (ami nem egy altér).*

6.15. Tétel. *A szorzás erősen folytonos a $\mathcal{B}(H)$ korlátos részhalmazain.*

Bizonyítás. $A_\alpha \xrightarrow{s} A$, $B_\alpha \xrightarrow{s} B$. $\|A_\alpha\|, \|B_\alpha\|$ korlátos.

$$\|A_\alpha B_\alpha x - ABx\| = \|A_\alpha(B_\alpha - B)x + (A_\alpha - A)Bx\| \leq \|A_\alpha\| \cdot \|B_\alpha x - Bx\| + \|(A_\alpha - A)Bx\| \to 0$$

□

6.16. Definíció. *Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ folytonos függvény* erősen folytonos*nak nevezzük ha $A_\alpha \xrightarrow{w} A$, $A_\alpha, A \in \mathcal{B}(H)$ önadjungáltak esetén $f(A_\alpha) \xrightarrow{s} f(A)$.*

6.17. Tétel. *Minden $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ korlátos folytonos függvény erősen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen F az összes korlátos, folytonos $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ függvény algebra, *-algebra.

Kell: F egy C^*-algebra.

$\mathcal{A} := F \cap C_0(\mathbb{R})$ a metszet a végtelenben eltűnő függvényekkel.

$f_n \in \mathcal{A}$, $f_n \to f$ sup-normában, $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap F$ ekkor $f \in \mathcal{A}$.

$$A_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}} A$$

$$\|f(A_\alpha)x - f(A)x\| \leq \|f(A_\alpha)x - f_n(A_\alpha)x\| + \|f_n(A_\alpha)x - f_n(A)x\| + \|f_n(A)x - f(A)x\|$$

Így $\mathcal{A}$ egy zárt rész C^*-algebrát alkot.

$$\underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{f(t):=}, \underbrace{\frac{t}{1+t^2}}_{g(t):=}$$

Benne vannak $\mathcal{A}$-ban. Ehhez $A_\alpha, A \in \mathcal{B}(H)$ önadjungáltak. $A_\alpha \xrightarrow{\mathrm{s}} A$. Következik-e, hogy $g(A_\alpha) \xrightarrow{\mathrm{s}} g(A)$. Jelölés: $\frac{1}{A}$ az A inverzével való szorzás.

$$g(A_\alpha)x - g(A)x = \left(\frac{A_\alpha}{1+A_\alpha^2} - \frac{A}{1+A^2}\right)x = (1+A_\alpha^2)\left(A_\alpha(1+A^2) - (1+A_\alpha^2)A\right)(1+A^2)^{-1}x$$

$$= (1+A_\alpha^2)\left(A_\alpha - A + A_\alpha(A - A_\alpha)A\right)(1+A^2)^{-1}x$$

$$= \underbrace{(1+A_\alpha^2)^{-1}}_{\text{korlátos}} \underbrace{\underbrace{(A_\alpha - A)}_{\xrightarrow{\mathrm{s}} 0}(1+A^2)^{-1}x}_{\to 0} + \underbrace{\frac{A_\alpha}{1+A_\alpha^2}}_{\text{korlátos } \frac{1}{2}\text{-el}} \underbrace{\underbrace{(A - A_\alpha)}_{\xrightarrow{\mathrm{s}} 0}\frac{A}{1+A^2}x}_{\to 0}$$

Nullába tart.

A másik függvényre:

$$f(t) = 1 - \underbrace{g(t)}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{t}_{\text{erősen folytonos}}$$

Ez erősen folytonos.

Most legyen h egy korlátos, folytonos

$$h(t) = h(t)(\underbrace{f(t) + g(t)t}_{1}) = \underbrace{h(t)}_{\text{korl.}} \underbrace{f(t)}_{\text{erősen folyt.}} + \underbrace{h(t)}_{\text{korl.}} \underbrace{g(t)t}_{\text{erősen f.}}$$

$\square$

6.18. Tétel (Kaplansky sűrűségi tétel)**.** *Legyen $\mathcal{A}$ az I-t tartalmazó rész C^*-algebrája $\mathcal{B}(H)$-nak és $\mathcal{B}$ ennek az erős (gyenge) lezártja ($\mathcal{B} = \mathcal{A}''$).*

C^*-algebra vagy *-algebra

Neumann dupla kommutánsból látszik, hogy $\mathcal{B}$-ben az $\mathcal{A}$ erősen és gyengén is sűrűn van.

1. *$\mathcal{A}$ önadjungáltjai erősen sűrűek $\mathcal{B}$ önadjungáltjai között. ($\mathcal{B}_{sa}$ = "a $\mathcal{B}$ önadjungáltjai") (gyengén nem kunszt, mert a * gyengén folytonos, erősen nem)*

2. *$(\mathcal{A}_{sa})_1$ erősen sűrű $(\mathcal{B}_{sa})_1$-ben (egységgömbök).*

3. *$(\mathcal{A})_1$ erősen sűrű $(\mathcal{B})_1$-ben.*

4. *$(\mathcal{A}_u)$ (az $\mathcal{A}$ uniterei) erősen sűrűek $\mathcal{B}_u$-ban.*

Bizonyítás. (1) Legyen $B \in \mathcal{B}_{sa}$, akkor $\exists A_\alpha \in \mathcal{A}$ hogy

$$A_\alpha \to B \text{ erősen és gyengén}$$

$$A_\alpha^* \to B^* = B \text{ erősen és gyengén}$$

Így

$$\frac{A_\alpha + A_\alpha^*}{2} \xrightarrow{\text{w}} B$$

Így B benne van $\mathcal{A}_{sa}$ gyenge lezártjában, ami megegyezik az erős lezárttal.

(2)

$$B \in (\mathcal{B}_{sa})_1 \Rightarrow \exists A_\alpha \in \mathcal{A}_{sa} \text{ hogy}$$

$$A_\alpha \xrightarrow{\text{w}} B \quad \sigma(B) \subseteq [-1, 1]$$

h legyen olyan $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ függvény, hogy $[-1, 1]$-en az identitás, kívül meg folytonosan lecseng. h erősen folytonos.

$$h(A_\alpha) \xrightarrow{\text{s}} h(B)$$

$$\| \underbrace{h(A_\alpha)}_{\mathcal{A}_{sa}} \| \leq 1$$

A pozitivitásra más h függvénnyel ugyanígy be lehet látni.

(3)

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$$

$M_2(\mathcal{A})$ erősen sűrű $M_2(\mathcal{B})$-ben és ezek is zárt C^*-algebrák.

$$\|A\|, \|B\|, \|C\|, \|D\| \leq \|\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)\| \leq \|A\| + \|B\| + \|C\| + \|D\|$$

de erre a mátrixra jobb becslés is adható. Egy $B \in \mathcal{B}_1$-re

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \left(M_2(\mathcal{B})_{sa}\right)_1 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \left(M_2(\mathcal{A})_{sa}\right)_1 \text{ erős lezártjában}$$

Innen visszakapom a B-kre a tartást.

(4) $U \in \mathcal{B}_u \Rightarrow U = e^{iT}T \in \mathcal{B}_{sa} - ra.$ Visszavezetjük önadjungáltakra, és e^{it} erősen folytonos (mert korlátos és folytonos). Így $e^{iT_\alpha} \to e^{iT} \in \mathcal{A}_u$ $\square$

6.19. Tétel (Kadison transzitivitási tétel)**.** *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ rész C^*-algebra, ami tolpologikusan irreducibilis (nincsen nem triviális, zárt, minden elemére invariáns altere). Ekkor tetszőleges $x_1, \ldots x_n$ független vektorrendszer és $y_1 \ldots y_n \in H$ vektorok esetén létezik $A \in \mathcal{A}$ hogy*

$$Ax_i = y_i \quad \forall i = 1 \ldots n$$

Vagyis lehet interpolálni.

6.20. Következmény. *Topologikusan irreducibilis rész C^*-algebra algebrailag is irreduibilis.*

Nem bizonyítjuk: egy C^*-algebra pontosan akkor Naumann algebra, ha duális tere valaminek. Példa: c_0 nullába tartó korlátos sorozatok sup-normával nem duális tere semminek.

7. Hilbert-Schmidt és trace-operátorok

7.1. Definíció. *Legyen H szeparábilis Hilbert tér. Jelölje $C_2(H)$ azon $A \in \mathcal{B}(H)$ operátorok összességét, amelyekre létezik e_n O.N.B hogy*

$$\sum \|Ae_n\|^2 < \infty$$

7.2. Tétel. *Legyen $A \in C_2(H)$, ekkor $\sum \|Ae_n\|^2 < \infty$ minden e_n O.N.B esetén és az összeg független e_n-től. És $C_2(H) \subset \mathcal{B}(H)$ egy *-ideál és a fenti összeg gyöke norma $C_2(H)$-n.*

7.3. Megjegyzés. *$\mathcal{B}(H)$-ban minden ideál *-ideál. Mert $S \subset \mathcal{B}(H)$ ideálra*

$$A \in S \Rightarrow A = U|A|$$

$$U^*A = U^*U|A| = |A| \in S$$

tétel. (f_n) legyen O.N.B

$$\sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_n \sum_m |\langle Ae_n, f_m\rangle|^2 = \sum_m \sum_n |\langle Ae_n, f_m\rangle|^2$$

$$= \sum_m \sum_n |\langle e_n, A^* f_m\rangle|^2 = \sum_m \|A^* f_n\|^2$$

Így

$$\sum \|Ae_n\|^2 = \sum \|A^* f_n\|^2$$

Így egy harmadik O.N.B-al kapom az állítást. Sőt A^* ezen "normája" ugyan az, mint A "normája".

Ez lineáris tér lesz:

$$\sum \|(A+B)e_n\|^2 \leq \sum \|Ae_n\|^2 + \|Be_n\|^2 < \infty$$

És a Minkowszki egyenlőséget kapom a normára:

$$\sqrt{\sum \|(A+B)e_n\|^2} \leq \sqrt{\sum \|Ae_n\|^2 + \sum \|Be_n\|^2} \leq \sqrt{\sum \|Ae_n\|^2} + \sqrt{\sum \|Be_n\|^2}$$

Így a $\| \bullet \|_2 \coloneqq \sqrt{\sum \| \bullet e_n\|^2}$ norma-jelöltem homogén és szub-additív. Sőt

$$\|A\| \leq \|A\|_2$$

$C_2(H)$ bal ideál $\mathcal{B}(H)$-ban:

$$\sum \underbrace{\|TAe_n\|^2}_{\|T\|^2 \cdot \|Ae_n\|^2} \leq \|T\|^2 \sum \|Ae_n\|^2$$

Adjungálttal látszik, hogy jobb ideál is. □

7.4. Tétel. *$C_2(H) \subset C(H)$, tetsz $A \in C_2(H)$ esetén A szinguláris értékei ($|A|$ saját értékei) ℓ_2 beli vektort alkotnak.*

Bizonyítás. $A \in C_2(H) \Rightarrow |A| \in C_2(H)$, mert akármilyen ideál zárt az abszolút értékre (előbb számoltuk ki).

Legyen $|A|$ spektál felbontásában $P_\varepsilon := E([\varepsilon, \infty) \cap \sigma(|A|^2))$ véges rangú, mert

$$\varepsilon P_\varepsilon \leq |A|^2 \Rightarrow \varepsilon \langle P_\varepsilon e_n, e_n \rangle \leq \underbrace{\||A|e_n\|^2}_{\langle |A|^2 e_n, e_n \rangle}$$

Így $|A|^2$ kompakt, de volt hogy önadjungáltaknál ekkor $|A|$ is kompakt, ekkor $A = U|A|$ is kompakt (4.1 feladat).

Így $|A|$ kompaktra $|A| = \sum \lambda_n e_n \otimes e_n$ egy e_n ortonormált bázisra (λ_n-ek pont a szinguláris értékek).

$$\infty > \sum \||A|e_n\|^2 = \sum \lambda_n^2$$

□

7.5. Megjegyzés. *Tetsz $A \in C(H)$-ra ha s_n-ek az A szinguláris értékei (vagy λ_n-ek az A sajátértékei),akkor*

$$\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^p \leq \sum_{k=1}^{m} |s_k|^p \quad \forall m \in \mathbb{N}, 0 < p < \infty$$

Ahol az értélek nagyság szerint csökkenőleg vannak rendezve és multiplicitással véve.

7.6. Megjegyzés. *$F(H)$ véges rangú operátorok ideálja benne van $C_2(H)$-ban. Egyszerűen véges indexig megy az összeg.*

Könnyű látni, hogy $F(H) \subset C_2(H)$ sűrű is ebben a $\| \bullet \|_2$ norma topológiában.

$$F_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda e_k \otimes e_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \lambda e_k \otimes e_k \ \textit{a} \ \| \bullet \|_2 \ \textit{normában}$$

7.7. Definíció (trace típusú vagy nyom-operátor)**.** *$C_1(H)$ jelölje azon $A \in \mathcal{B}(H)$-k összességét, amire*

$$\sum \langle |A|e_n, e_n \rangle < \infty$$

valamilyen e_n O.N.Besetén.

7.8. Tétel. *Legyen $A \in C_1(H)$ ekkor $\sum \langle Ae_n, e_n \rangle$ abszolút konvergens $\forall e_n$ O.N.Besetén. Összege független (e_n)-től és*

$$\sum | \langle Ae_n, e_n \rangle | \leq \sum \langle |A|e_n, e_n \rangle$$

Bizonyítás. $A = U|A|$-ra

$$\sum |\langle Ae_n, e_n\rangle| = \sum |\langle U|A|e_n, e_n\rangle| = \sum \left|\left\langle \underbrace{U\sqrt{|A|}}_{C}\underbrace{\sqrt{|A|}}_{B}e_n, e_n\right\rangle\right| = \sum |\langle Be_n, C^*e_n\rangle|$$

$$\leq \sum \|Be_n\|\|C^*e_n\| \leq \underbrace{\sqrt{\sum \|Be_n\|^2}}_{\|B\|_2}\sqrt{\sum \|C^*e_n\|^2}$$

Így az abszolút konvergencia rendben van. Továbbá

$$\leq \|B\|_2 \cdot \|C^*\|_2 = \|B\|_2 \cdot \|C\|_2 \leq \|B\|_2 \cdot \|U\|_2 \cdot \underbrace{\|\sqrt{|A|}\|_2}_{\sum\langle|A|e_n, e_n\rangle}$$

És

$$\sum \langle Ae_n, e_n\rangle = \sum \langle Be_n, C^*e_n\rangle = \sum_n\sum_m \langle Be_n, f_m\rangle\langle f_m, C^*e_n\rangle$$

Fubini használható, mert

$$\sum_n\sum_m |\langle Be_n, f_m\rangle\langle f_m, C^*e_n\rangle| \leq \sqrt{\sum_n\sum_m |\langle Be_n, f_m\rangle|}\cdot\sqrt{\sum_n\sum_m |\langle e_n, C^*f_m\rangle|} = \|B\|_2\cdot\|C^*\|_2$$

Így

$$\sum \langle Ae_n, e_n\rangle = \sum_m\sum_n \langle Be_n, f_m\rangle\langle f_m, C^*e_n\rangle = \sum_m\sum_n \langle f_m, C^*e_n\rangle\langle Be_n, f_m\rangle = \sum_m \langle BCf_m, f_m\rangle$$

És egy harmadik bázissal BC visszacserélődik $CB = A$-ra. $\square$

7.9. Állítás. *$F(H) \subset C_1(H) \subset C(H)$, tetsz $A \in C_1(H)$ esetén A szinguláris értékei ℓ_1 beliek*

Bizonyítás. mint $\|\bullet\|_2$-nél. $\square$

7.10. Állítás. *$T \in C_1(H)$ esetén $T = AB$ megfelelő $A, B \in C_2(H)$ esetén.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$ irányt láttuk.

$\Leftarrow$ Ehhez $|T| = U^*T = (U^*A)B$, ezzel végigszámolva jó lesz. $\square$

7.11. Definíció. *Legyen $A \in C_1(H)$. Legyen $\mathrm{Tr}(A) := \sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle$ (független e_n O.N.Bválasztásától) és $\|A\|_1 := \mathrm{Tr}\,|A|$-t a trace-normának hívjuk.*

7.12. Megjegyzés. *$A \in C_1(H)$ esetén $\|A\|_1 \geq \|A\|$ mert*

$$\langle |A|x, x\rangle \leq \|A\|_1 \quad \forall \|x\| = 1$$

és

$$\|A\| \underbrace{=}_{\text{polár felbontás}} \||A|\| = \|\sqrt{|A|}^2\| \leq \underbrace{\|\sqrt{|A|}\|^2}_{\sup\left\langle \sqrt{|A|}x, \sqrt{|A|}x\right\rangle} \leq \|A\|_1$$

7.13. Tétel. *$C_1(H) \subset \mathcal{B}(H)$ egy *-ideál, amin az $\| \bullet \|_1$ norma. (Banach tér is lesz, mert duális tere valaminek)*

Bizonyítás. $T \in C_1(H), X \in \mathcal{B}(H) \Rightarrow T = AB,\ A, B \in C_2(H)$ és C_2 ideál.

Miért norma, a linearitást nézzük: $A, B \in C_1(H)$

$$A + B = W \cdot (|A + B|) \quad \text{megfelelő } W \text{ unitérrel}$$

$$|A + B| = W^*(A + B) = W^*XX' + W^*YY'$$

megfelelő $X, X', Y, Y' \in C_2(H)$-ra.

$$\sum |\langle W^*XX'e_n, e_n\rangle| = \sum |\langle X'e_n, X^*We_n\rangle| \leq \sqrt{\sum \|X'e_n\|^2}\sqrt{\sum \|(X^*W)e_n\|^2}$$

Így

$$\sum \langle |A + B|e_n, e_n\rangle < \infty$$

azaz $A + B \in C_1(H)$

$$\operatorname{Tr} |A + B| = \operatorname{Tr} W^*(A + B) = \operatorname{Tr} W^*A + \operatorname{Tr} W^*B$$

mert Tr lineáris

$$= |\operatorname{Tr} W^*A + \operatorname{Tr} W^*B| \leq |\operatorname{Tr} W^*A| + |\operatorname{Tr} W^*B| \leq \underbrace{\|W^*A\|_1}_{\leq \|W^*\| \cdot \|A\|_1} + \|W^*B\|_1$$

Mert, ha $A \in C_1(H), T \in \mathcal{B}(H)$, akkor $\|TA\|_1 \leq \|T\| \cdot \|A\|_1$. Ennek belátásához:

$$|TA| = U^*TW^*|A|$$

$$\|TA\|_1 = \sum \langle X|A|e_n, e_n\rangle = \sum \sqrt{|A|}e_n, \sqrt{|A|}X^*e_n \leq \underbrace{\sqrt{\|\sqrt{|A|}e_n\|^2}}_{\langle |A|e_n, e_n\rangle} \sqrt{\|\sqrt{|A|}X^*e_n\|^2}$$

$$\leq \sqrt{\|A\|_1} \cdot \|X\| \sqrt{\|A\|_1} = \|X\|\|A\|_1 \leq \|T\| \cdot \|A\|_1$$

Ha $\|A\|_1 \to 0 \Rightarrow \|A\| \to 0$. $\square$

7.14. Tétel. *$C_2(H)$ egy Hilbert tér az $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^*A)$ belső szorzattal.* Tr *egy lineáris funkcionál.*

Bizonyítás. A skalár szorzta jól definiált, mert két $C_2(H)$ beli szorzata $C_1(H)$ beli, van Tr-e. Tr első változóban lineáris, másodikban konjugált lineáris.

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}\, A^*A = \|A\|_2^2 \geq 0$$

és csak akkor 0 ha $A = 0$.

Teljes erre a normára: legyen A_n Cauchy sorozat $\| \bullet \|_2$-re nézve.

$$\sum_k \|(A_n - A_m)f_k\|^2 \leq \varepsilon^2$$

és minden véges k indexhalmazra:

$$\sum_{k \text{ végesre}} \|(A_n - A_m)f_k\|^2 \leq \varepsilon^2$$

Ez $\mathcal{B}(H)$-ban is Cauchy, így $\exists A \in \mathcal{B}(H)$ hogy $A_n \to A$ szokásos normában, ekkor pontonként is véges sok f_k-ra, de ε-ban egyenletesen. □

7.15. Állítás. $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$ *teljesül minden $A, B \in C_2(H)$-ra és $A \in C_1(H), B \in \mathcal{B}(H)$-ra.*

Bizonyítás.

$$\sum \langle ABe_n, e_n\rangle = \sum \langle Be_n, A^*e_n\rangle =$$

$$\sum_n \sum_m \langle Be_n, f_m\rangle \langle f_m, A^*e_n\rangle \underbrace{=}_{\text{Fubini}} \sum_m \sum_n \langle f_m, A^*e_n\rangle \langle Be_n, f_m\rangle =$$

$$\sum_m \sum_n \langle Af_m, e_n\rangle \langle e_n, B^*f_m\rangle = \sum_m \langle Af_m, B^*f_m\rangle = \mathrm{Tr}\, BA$$

$A \in C_1(H), B \in \mathcal{B}(H)$-ra $A = XY$ ahol $X, Y \in C_2(H)$

$$\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, XYB = \mathrm{Tr}\, YBX = \mathrm{Tr}\, BXY = \mathrm{Tr}\, BA$$

□

7.16. Tétel (Schatten)**.** *$C(H)^* = C_1(H)$ vagyis $\forall T \in C_1(H)$ operátorhoz az*

$$f_T(A) := \mathrm{Tr}\, TA \quad A \in C(H)$$

egy korlátos lin funkcionál $C(H)$-n, továbbá a $T \to f_T$ izometrikus izomorfizmusa $C_1(H)$-nak $C(H)^*$-ra.

Bizonyítás. f_T lineáris, folytonos:

$$|f_T(A)| = \operatorname{Tr} TA = \operatorname{Tr} AT \leq \|AT\|_1 \leq \|A\|\|T\|_1 \Rightarrow \|f_T\| \leq \|T\|_1$$

$$\|T\|_1 = \sum \langle |T|e_n, e_n\rangle \approx \sum_{n=1}^{N} \langle |T|e_n, e_n\rangle$$

P_N vetítsen a $\{e_1, \dots e_N\}$ altérre.

$$= \operatorname{Tr} |T|P_N = \operatorname{Tr} U^*TP_N = \operatorname{Tr} TP_NU^* = f_T(P_NU*) \leq \|P_NU^*\| \leq \|P_N\|\|U\| \leq 1$$

Tehát $T \to f_T$ lineáris izometrikus izomorfizmus.

Kell minden funkcionál ilyen. Legyen $f \in C(H)^* \Rightarrow |f(\underbrace{A}_{\in C(H)})| \leq \|f\|\|A\|$ Ha $A \in C_2(H) \subset C(H)$-ra szorítkozok, akkor

$$|f(A)| \leq \|f\|\|A\|_2$$

$C_2(H)$ egy Hilbert tér, ott van Riesz reprezentációs tétel, ezért létezik $T \in C_2(H)$ hogy

$$f(A) = \operatorname{Tr} AT \quad \forall A \in C_2(H)$$

Kell, hogy $T \in C_1(H)$ is igaz (megj. $C_1(H) \subset C_2(H)$) Véges rangúakkal approximálhatom T-t $T = P_NU^*|T|$ segítségével.

Így $f = f_T$ $C_2(H)$-n egy $T \in C_1(H)$-ra, de $C_2(H) \subset C(H)$ sűrű, így

$$f = f_T$$

□

7.17. Megjegyzés. *Lehetne definiálni $C_p(H)$-t is és dualitások is igazak $C_p(H)$ és $C_q(H)$ között.*

7.18. Állítás (Schatten). $\mathcal{B}(H) = C_1(H)^*$ *az*

$$A \mapsto f_A$$
$$f_A : C_1(H) \mapsto \mathbb{C}$$
$$f_A : T \mapsto \operatorname{Tr} AT (= \operatorname{Tr} TA)$$

izometrikus izomorfizmussal.

Bizonyítás. Az hogy f_A egy korlátos lin. funkcionálja $C_1(H)$-nak a megfelelő normával ($A \in \mathcal{B}(H)$), az nem izgalmas.

Szürjektivitás: legyen $f \in C_1(H)^*$

$$B(x, y) = f(x \otimes y)$$

Ez egy sesquilineáris korlátos forma H-n:

$$|B(x, y)| = f(x \otimes y) \leq \|f\| \cdot \|x \otimes y\|_1 \leq \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

Így ez egy operátorból származik: $\exists A \in \mathcal{B}(H)$ hogy

$$B(x, y) = \langle Ax, y \rangle = \operatorname{Tr} \underbrace{A \cdot x \otimes y}_{(Ax) \otimes y} = f_A(x \otimes y)$$

És a véges rangú operátorokat generálják az ilyen 1 rangúak. és $F(H)$ sűrű $C_1(H)$-ban. □

8. σ gyenge és erős topológia

8.1. Definíció. *A* $T \mapsto \sqrt{\sum \|Tx_n\|^2}$ *és* $T \mapsto \sqrt{\sum \langle Tx_n, y_n \rangle}$ *ahol* $\sum \|x_n\|^2 < \infty, \sum \|y_n\|^2 < \infty$ $x_n, y_n \in H$ *szeminorma rendszerek által indukált lokálisan konvex vektortopológiákat* σ-erős és σ-gyenge *topológiának hívjuk.*

8.2. Megjegyzés.

- *Erős operátor topológia* $\subset$ *σ-erős (ha σ-erősben tart, akkor erősben is).*
- *Gyenge operátor topológia* $\subset$ *σ-gyenge.*
- *σ-gyenge* $\subset$ *σ-erős.*

8.3. Tétel. *Legyen f lin. funkcionál $\mathcal{B}(H)$-n, akkor a következők ekvivalensek:*

1. *f σ-erősen folytonos*
2. *f σ-gyengén folytonos*
3. *$\exists T \in C_1(H)$ hogy $f = f_T$ azaz $f(A) = \operatorname{Tr} AT$ $\forall A \in \mathcal{B}(H)$*

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (1) trivi

(3) $\Rightarrow$ (2)

$$f(A) = \operatorname{Tr} AT$$

$|T| = \sum \lambda_n e_n \otimes e_n$ egy O.N.B. $T = U|T|$ poláris felbontás.

$$x_n := \sqrt{\lambda_n} U e_n, \sum \|x_n\|^2 < \infty$$

$$y_n := \sqrt{\lambda_n} e_n, \sum \|y_n\|^2 < \infty$$

Ha

$$\sum |\langle Ax_n, y_n \rangle| < 1$$

ami

$$\sum |\left\langle A\sqrt{\lambda_n} U e_n, \sqrt{\lambda_n} e_n \right\rangle| = \sum \lambda_n |\langle AUe_n, e_n \rangle| < 1$$

$$|\operatorname{Tr} AT| = |\operatorname{Tr} AU|T|| = \left|\sum \lambda_n |\langle AUe_n, e_n \rangle|\right| < \sum \lambda_n |\langle AUe_n, e_n \rangle| < 1$$

Vagyis f σ-gyenge folytonos.

(1) $\Rightarrow$ (3) Tegyük vel hogy f σ-erősen folytonos. Elég egy x_n rendszerrel foglalkozni, mert véges sok $\{x_n\}^i$ rendszert össze tudok fésülni egy rendszerré.

$\exists x_n \in H$ hogy norma-négyzetük szummábilis. Feltehető, hogy

$$\sum \|Tx_n\|^2 < 1 \Rightarrow f(T) < 1$$

átskálázással.

$$(Tx1, Tx_2, \dots) \mapsto f(T)$$

jól definiált, mert ha $Tx_i = Sx_i$, akkor

$$\sum \|(T-S)x_n\|^2 < \varepsilon \ \forall \varepsilon \Rightarrow |f(T-S)| < \varepsilon \ \forall \varepsilon \Rightarrow f(T) = f(S)$$

Ez egy lin. funkcionál H^ω egy alterén és korlátos is. Ezért

$$|f(T)| \leq \sqrt{\sum \|Tx_n\|^2}$$

Ez pedig a norma H^ω-n. Így Hahn-Banach miatt kiterjeszthető H^ω-ra korlátos lin. funkcionállá.

És a Riesz miatt $\exists y_n \in H$ végtelen sorozat, hogy $\sum \|y_n\|^2 < \infty$ és

$$f(A) = \sum_n \langle Ax_n, y_n \rangle \ \ \forall A \in \mathcal{B}(H)$$

Legyen e_n O.N.B

$$B := \sum x_n \otimes e_n, C = \sum y_n \otimes e_n \in C_2(H)$$

ezzel

$$f(A) = \operatorname{Tr} C^* AB = \operatorname{Tr} A \underbrace{BC^*}_{C_1(H)} \quad \forall A \in \mathcal{B}(H)$$

úgy választottuk. □

8.4. Tétel (Neumann dupla kommutáns tétel kiterjesztése)**.** *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ az I-t tartalmazó rész *-algebra. Ekkor $\mathcal{A}$ lezártja a σ-erős vagy σ-gyenge topológiában $\mathcal{A}''$.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{A}$ konvex halmaz és a funkcionálok ugyan azok, ezért $\overline{\mathcal{A}}^{\sigma\text{-s}} = \overline{\mathcal{A}}^{\sigma\text{-w}}$ (Hahn-Banach elválasztási alakja).

A kommutáns zárt a σ-erős operátor topológiában

$$T_\alpha A = AT_\alpha \ \forall A$$

$$T_\alpha \xrightarrow{\sigma\text{-s}} T \Rightarrow T_\alpha \xrightarrow{\text{s}} T$$

Ebből $TA = AT \ \forall A$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$ sűrű σ-gyenge értelemben.

$$\varphi A \mapsto \begin{pmatrix} A & \\ & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(H^\omega)$$

Itt $\varphi(\mathcal{A}'') = \varphi(\mathcal{A})''$. Ha $A \in \mathcal{A}'' \Rightarrow \varphi(A) \in \varphi(\mathcal{A})'' \Rightarrow \varphi(A) \in \overline{\varphi(\mathcal{A})}^{\text{s}}$ a Neumann dupla kommutáns miatt.

Ekkor tetszőleges $x_n \in H$ vektorokra hogy $\sum \|x_n\|^2 < \infty$ $\exists T \in \mathcal{A}$ hogy

$$\left\| \varphi(A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} - \varphi(T) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$$

azaz

$$\sum_n \|Ax_n - Tx_n\|^2 < \varepsilon$$

azaz $A \in \overline{\mathcal{A}}^{\sigma\text{-s}}$. És $\mathcal{A}'' \subset \overline{\mathcal{A}''}^{\sigma\text{-s}} \subset \mathcal{A}''$. Vagyis $\mathcal{A}''$ σ-erős zárt és tartalmazza $\mathcal{A}$-t. □

8.5. Tétel (Dixmier)**.** *Minden Neumann algebra egy Banach-tér duális terével izometrikusan izomorf.*

Bizonyítás. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ Neumann algebra.

$$K := \{T \in C_1(H) | \operatorname{Tr} TA = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

Az $\mathcal{A}$ "annihilátora". $K \subset C_1(H)$ zárt altér.

$$T_n \overset{\|\bullet\|_1}{\to} T \Rightarrow |\operatorname{Tr} T_n A - \operatorname{Tr} TA| = |\operatorname{Tr}(T_n - T)A| \leq \|T_n - T\|_1 \|A\| \to 0$$

Belátjuk, hogy $\mathcal{A} \cong (C_1(H)/K)^*$.

$A \in \mathcal{A}$-ra

$$f_A : [T]_K \mapsto \operatorname{Tr} TA \quad T \in C_1(H)$$

jól definiált lineáris funkcionálja $C_1(H)/K$-nek. korlátos: $[T] = [S]$ két reprezentánsra

$$|\operatorname{Tr} TA| = |\operatorname{Tr} SA| \leq \|S\|_1 \|A\|$$

infimumot véve $S \in [T]$-re

$$\|f_A(T)\| \leq \|[T]\|_1 \|A\|$$

vagyis $\|f_A\| \leq \|A\|$ és egyelőség is teljesül. Emlékeztetőül: $\|T\|_1 \leq 1 \Rightarrow \|[T]\|_1 \leq 1$.

Tehát $A \mapsto f_A$ egy lineáris $\mathcal{A} \mapsto (C_1(H)/K)^*$ izometria.

Meg kell mutatni, hogy ez "-ra". Legyen $f \in (C_1(H)/K)^*$.

$$T \mapsto [T] \mapsto f([T])$$

Ez korlátos lin. funkcionál. Erre $\exists A \in \mathcal{B}(H)$ hogy

$$f([T]) = \operatorname{Tr} AT \ \forall T \in C_1(H)$$

és nulla ha $T \in K$. Ha T olyan hogy $\operatorname{Tr} TX = 0$ minden $X \in \mathcal{A}$-ra, akkor $\operatorname{Tr} TA = 0$.

Minden olyan σ-erősen folytonos lin. funkcionálja $\mathcal{B}(H)$-nak, ami eltűnik $\mathcal{A}$-n az eltűnik A elemen is. Ekkor $A \in \overline{\mathcal{A}}^{\sigma\text{-s}} = \mathcal{A}$. Tehát $f = f_A$. □

8.6. Megjegyzés. *Krein Millman konvex burkos tétel miatt $C(H)$ nem duális tere semminek sem.*

Sőt, Sakai: Naumann algebra $\Rightarrow$ egy $\mathcal{B}(H)$ duális tere.

9. $\mathbb{L}^\infty$ függvénykalkulus

Ez több, mint a korlátos mérhető függvénykalkukus.

9.1. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér. Ekkor $f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$-re*

$$f \mapsto M_f \in \mathcal{B}(\mathbb{L}^2(\mu))$$

Egy izometrikus *-algebra izomorfizmusa $\mathbb{L}^\infty$-nak a $\mathcal{B}(\mathbb{L}^2)$-nek egy maximális kommutatív rész Neumann algebrájára.

Bizonyítás. A Neumann-tulajdonságot nem kell hangsúlyozni, az a maximalitásból kijön.

Meg fogjuk mutatni, hogy $\{M_f | f \in \mathbb{L}^\infty\}$ egyenlő a kommutánsával.

Az, hogy egy ilyen szorzás kommutátor felcserélhető minden ilyennel, az trivi.

Vegyünk egy T operátort, ami minden ilyen szorzással felcserélhető.

$$TM_f = M_f T \quad \forall f \in \mathbb{L}^\infty$$

Legyen $g \in \mathcal{S}$ egyszerű függvény.

$$\Phi : g \mapsto \langle Tg, 1 \rangle$$

konstans 1 függvénnyel vett skalárszorzat. Ez egy korlátos lin. funkcionál az $\| \bullet \|_1$ normára nézve.

$$g = \underbrace{\varepsilon\sqrt{|g|}}_{g_1}\underbrace{\sqrt{|g|}}_{g_2}$$

$$|\langle T(g_2 g_1), 1 \rangle| = |\langle TM_{g_2} g_1, 1 \rangle| = |\langle M_{g_2} T g_1, 1 \rangle| =$$
$$= |\langle Tg_1, g_2 \rangle| \leq \|T\| \underbrace{\|g_1\|_2 \|g_2\|_2}_{\|g\|_1}$$

Az egyszerű függvények sűrűn vannak $\mathbb{L}^\infty$-ben. Így egyértelműen kiterjed f az $\mathbb{L}^\infty$-re.

$$\langle Tg, 1 \rangle = \int fg \, \mathrm{d}\mu = \langle M_f g, 1 \rangle \;\; \forall g \in \mathcal{S}$$

$g, g' \in \mathcal{S}$-re

$$\langle Tg, g' \rangle = \left\langle Tg\overline{g'}, 1 \right\rangle = \left\langle M_f(g\overline{g'}), 1 \right\rangle = \langle M_f g, g' \rangle$$

mert T felcserélhető minden szorzás operátorral.

És az egyszerű függvények sűrűek $\mathbb{L}^2$-ben is.

$$\{M_f\} = \{M_f\}'$$

Maximális? Ha $\{M_f\} \subset \mathcal{A}$ egy kommutatív Naumann albegrában, akkor

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \subset \{M_f\}' = \{M_f\}$$

Vagyis igen, maximális. $\square$

9.2. Tétel. *Legyen X kompakt Hausdorff tér, μ véges reguláris Borel mérték X-en. Ekkor*

$$\{M_\varphi | \varphi \in C(X)\} \subset \{M_\varphi | \varphi \in \mathbb{L}^\infty\}$$

sűrű a gyenge operátor topológiában. (ekkor erősben is, mert konvex halmaz).

Bizonyítás. Belátjuk, hogy

$$\{M_\varphi\}' \subset \{M_f\}$$

azaz ha valami ez összes folytonos függvénnyel felcserélhető, akkor ő egy $\mathbb{L}^\infty$ függvénnyel való szorzás operátor.

Ugyanaz, mint előbb, de g folytonos, nem egyszerű fv.

Ekkor

$$\{M_f\} \subset \{M_f\}' \subset \{M_\varphi\}'' \underbrace{=}_{\text{Naumann dupla kommutáns}} \overline{\{M\varphi\}}^{\mathrm{w}}$$

$\square$

9.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ rész algebra. Azt mondjuk, hogy $x \in H$* (topológikusan) ciklikus *vektora $\mathcal{A}$-nak. ha*

$$\overline{\mathcal{A}x} = H$$

szeparábilis *vektor, ha*

$$A \in \mathcal{A}, Ax = 0 \Rightarrow A = 0$$

9.4. Megjegyzés. *Ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ kommutatív rész algebra, akkor minden ciklikus vektor szeparál.*

Bizonyítás. Ha $Ax = 0 \Rightarrow \underbrace{TAx}_{ATx} = 0 \ \forall T \in \mathcal{A} \Rightarrow A = 0$ mert Tx sűrű H-ban. $\square$

9.5. Definíció. Generált Neumann algebra*: egy adott operátoregyüttest tartalmazó legszűkebb Neumann algebra. jele:* W^**.*

9.6. Megjegyzés. *Ha* $A \in \mathcal{B}(H)$*, akkor* $W^*(A) = \overline{C^*(A)}^s$

Ha $A \in \mathcal{B}(H)$ *normális, akkor* $W^* = \{A\}''$*. (ez kommutatív lesz)*

9.7. Tétel. *Legyen* $N \in \mathcal{B}(H)$ *normális és t.f.h* $W^*(N)$*-nak van ciklikus vektora. Ekkor* $\exists\mu$ *reguláris Borel mérték* $\sigma(N)$*-n (melyre nemüres nyílt halmaz mértéke pozitív) és* $U : H \mapsto \mathbb{L}^2(\mu)$ *unitér, ekkor*

$$f(N) \coloneqq U^{-1} M_f U \quad f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$$

egy izometrikus **-algebra izomorfizmusa* $\mathbb{L}^\infty(\mu)$*-nek* $W^*(N)$*-re, ami a folytonos függvénykalkukus kiterjesztése. (Spec.* $N = U^{-1} M_{id} U$*)*

Bizonyítás. x ciklikus vektora $W^*(N)$-nek.

$$U : f \mapsto f(N)x \in H \quad f \in C(\sigma(N))$$

$$\mu \coloneqq \langle E(\bullet)x, x\rangle$$

Ezen mérték szerint

$$\int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_2^2$$

$$\|f(N)x\|^2 = \left\langle (\int f \,\mathrm{d}E)x, (\int f \,\mathrm{d}E)x \right\rangle = \left\langle (\int f\overline{f} \,\mathrm{d}E)x, x \right\rangle = \int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu_{xx} = \|f\|_2^2$$

Vagyis U unitér lin. trafó. (mert normatartásból komplex téren a skalárszorzat tartás is követekezik) $C(\sigma(N))$-ről $C^*(N)x$-re. $C(\sigma(N)) \subset \mathbb{L}^2(\mu)$ sűrű és $C^*(N)x \subset W^*(N)x \subset H$ sűrű.

Így U egyértelműen kiterjeszthető $U : \mathbb{L}^2(\mu) \mapsto H$ unitér trafóvá.

$$f \mapsto U^{-1} M_f U$$

ha $f \in C(\sigma(N))$, akkor

$$(UM_fU^{-1}) \underbrace{g}_{\in C(\sigma(N))} (N)x = UM_f \underbrace{U^{-1}g(N)x}_{g} = \underbrace{(fg)(N)}_{f(N)g(N)} x$$

Így $UM_fU^{-1} = f(N)$ ha f folytonos. Tehát valóban a folytonos függvénykalkulus kiterjesztése.

Izometrikus *-izomorfizmus is, mert M_f az volt.

Mi a kép? Szürjektív-e?

$$\{U^{-1}M_fU | f \in C(\sigma(N))\} = U^{-1}\{M_f | f \in C(\sigma(N))\}U = C^*(N)$$

mert ez ekkor pont a folytonos függvénykalkukus. Veszem a dupla kommutánsát:

$$\begin{aligned} U^{-1}\{M_f | f \in C(\sigma(N))\}''U &= W^*(N) \\ &= U^{-1} \underbrace{\overline{\{M_f | f \in C(\sigma(N))\}}^{\mathrm{w}}}_{\{M_f | f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)\}} U \end{aligned}$$

A nem üres nyílt halmazok mértéke: legyen $G \subset \sigma(N)$ nem üres, nyílt. $\exists f \in C(\sigma(N))$ hogy $\operatorname{supp}(f) \subset G$ és $0 \leq f \leq \chi_G$. Erre ha

$$\|f(N)x\|^2 \int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu_{xx} = 0$$

lenne, akkor

$$f(N)x = 0 \Rightarrow f(N) = 0$$

mert x ciklikus, így $f \equiv 0$ $\lightning$. □

9.8. Megjegyzés. *Ha $W^*(N)$-nek van ciklikus vektora, akkor H szeparabilitás.*

Bizonyítás. $W^*(N)x$ sűrű H-ban, de ebben sűrű $C^*(N)x$, abban meg a polinomok sűrűek, azok megszámlálható bázisúak (racionális együtthatós polinomok). $\lightning$ □

9.9. Tétel. *$\mathcal{A}$ Neumann algebra egységgömbje kompakt a gyenge operátor topológiában.*

Bizonyítás.

$$A \in \mathcal{A}_1 \triangleq (\langle Ax, y\rangle)_{\|x\|,\|y\| \leq 1}$$

Két változós funkcionálnak tekintjük A-t gyenge operátor top. $\leftrightarrow$ pontonkénti konvergencia

$$(\langle Ax, y\rangle)_{\|x\|,\|y\| \leq 1} \subset \mathbb{D}^{H_1 \times H_1}$$

Tikhonov (Tychonoff) kompaktsági tétel miatt ez kompakt tér.

Ekkor ebben zárt ez a halmaz, mert A_α esetén:

$$\langle A_\alpha x, y\rangle \underbrace{\rightarrow}_{\forall x,y} B(x, y)$$

B egy sesquilineáris forma és korlátos. Így van hozzá A operátor, amivel való skalárszorzat a B. (hasonló, mint Banach–Alaoglu) □

9.10. Tétel. *Legyen H szeparabilitás H-tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ az I-t tartalmazó kommutatív rész *-algebra. Ekkor van $\mathcal{A}$-nak szeparáló vektora.*

Bizonyítás. $x \in H$ $\overline{\mathcal{A}x}$ Tekintsük ilyenek egy maximális páronként ortogonális rendszerét.

$$y \perp \overline{\mathcal{A}x} \Rightarrow \overline{\mathcal{A}y} \perp \overline{\mathcal{A}x}$$

$$\langle Ay, A'x \rangle = \left\langle y, \underbrace{A^* A'}x \right\rangle \quad \forall A, A' \in \mathcal{A}$$

Ezek generálják H-t, ezért megszámlálható sok van belőlük. Kapcsolódó x-ek: x_n egységvektorok, $x_n \in \overline{\mathcal{A}x_n}$ miatt $x_n \perp x_m$

$$z = \sum \frac{1}{n} x_n$$

$$0 = Az = \sum \frac{1}{n} \underbrace{Ax_n}_{\text{ortogonális}} \Rightarrow Ax_n = 0 \ \forall n \Rightarrow$$

$$TAx_n = 0 \ \forall T \in \mathcal{A}$$

kommutativitás miatt

$$ATx_n = 0 \quad \forall T \in \mathcal{A}$$

így

$$A|_{\overline{\mathcal{A}x_n}} = 0 \Rightarrow A = 0$$

□

9.11. Lemma. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ rész *-algebra, $x \in H$ szeparáló vektor. Tekintsük az $M := \overline{\mathcal{A}x}$ zárt alteret. M irreducibilis altere $\mathcal{A}$-nak.*

Az

$$A \mapsto A|_M$$

transzformáció egy izometrikus *-algebra izomorfizmus ($\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}(M)$). És spektrumot megőrzi.

Bizonyítás. A trafó injektív.

A spektrummal:

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}|_M}(A|_M) = \sigma(A|_M)$$

spektrumszűkítés miatt. □

9.12. Tétel. *Legyen N normális operátor a H szeparabilitás Hilbert téren. Ekkor $\exists \mu$ véges Borel mérték (reguláris) $\sigma(N)$-en, melynél nem üres nyílt mértéke pozitív és izometrikus *-algebra izomorfizmus $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ és $W^*(N)$ között, ami a folytonos függvénykalkukus kiterjesztése.*

Bizonyítás. $W^*(N)$-nek van szeparáló vektora $x \in H$. Legyen $M = \overline{W^*(N)x}$ Tekintsük $W^*(N)|_M$-et. Ennek lesz ciklikus vektora (x). Így $W^*(N) \cong W^*(N)|_M$ (előző lemma)

Kell

$$W^*(N)|_M = W^*\left(N|_M\right)$$

és akkor használható a tétel.

$$p(N, N^*)|_M = p(N|_M, N|_M^*)$$

polinomokra.

$$C^*(N)|_M \subset C^*\left(N|_M\right) \subset W^*\left(N|_M\right)$$

Lemma miatt Így

$$W^*\left(N\right)|_M \subset W^*\left(N|_M\right)$$

A másik irányú tartalmazás: $\left(W^*(N|_M)\right)_1$-ban $C^*(N|_M)_1$ erősen sűrűn van (Kaplansky). Ami pedig $\left(C^*(N)|_M\right)_1$, ami benne van $(W^*(N)|_M)_1$-ben.

$$W^*(N|_M)_1 \subset \overline{(W^*(N)|_M)_1}^{\mathrm{s}} \underbrace{=}_{\text{Lemma}} \overline{(W^*(N)_1|_M)}^{\mathrm{s}}$$

Ez utóbbi gyenge kompakt is, mert mindegy hogy erős vagy gyengén zárom le. $A \mapsto A|_M$ gyengén folytonos. Így nem kell lezárni

$$= W^*(N)_1|_M$$

Így

$$W^*(N|_M) \subseteq W^*(N)|_M$$

a megszorítés izometrikus izomorfizmus, így

$$W^*(N)|_M = W^*(N|_M) \leftrightarrow \mathbb{L}^\infty(\sigma(N), \text{a } N|_M\text{-hez gyártott mérték})$$

Van ciklikus vektor (x). A leképezés az $f \mapsto U^{-1}M_fU$

$$f(N) \leftarrow f(N)|_M = f(N|_M) \leftarrow f \quad f \text{ folytonos}$$

∎

10. Kommutatív Neumann algebrák

10.1. Feladat. *Legyen X komplex vektortér, $Q : X \mapsto \mathbb{C}$ kvadratikus alak*

$$Q(\lambda x) = |\lambda| Q(x)$$

Pontosan akkor $\exists B : X \times X \to \mathbb{C}$ sesquilineáris forma, hogy $B(x,x) = Q(x)$ $\forall x$, ha

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2Q(x) + 2Q(y) \quad \forall x, y$$

Bizonyítás.

$$B(x,y) = \frac{1}{4}\{Q(x+y) + Q(x-y) + i(Q(x+iy) - Q(x-iy))\}$$

□

10.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ kommutatív Neumann-algebra. Ekkor $\mathcal{A}$ struktúra tere Stone-tér, azaz olyan kompakt Hausdorff tér, amiben nyílt halmaz lezártja is nyílt.*

Bizonyítás. $U \subset \widehat{\mathcal{A}}$ nyílt halmaz

$$\mathcal{F} := \{f : \widehat{\mathcal{A}} \mapsto [0,1] | f \text{ folytonos}, f|_U = 0\}$$

A $\leq$-el irányított halmaz.

Arra hajtunk, hogy : Folytonos függvény $\leftrightarrow$ operátor $\mathcal{A}$-ból $\leftrightarrow$ kvadratikus alak

$$f \mapsto Q_f$$

és a rendezést is megőrzi. Függvényekbél pontonkénti $\leq$, operátoroknál pozitív szemidefinit-ség, kvadratikus alakoknál pontonkénti egyenlőtlenség.

Ezek a kvadratikus formák tudják a parallelogramma azonosságot, mert sesquilineáris formákból jönnek (A_f).

$$\{Q_f\}_{f \in \mathcal{F}} \text{ nett, monoton növő}$$

Így $Q_f \to Q_0$ pontonként konvergál a pontonkénti szuprémumhoz ($f \in \mathcal{F}$). Q_0 is tudni fogja a parallelogramma azonosságot. Így Q_0 is előáll sesquilineáris formából.

$$0 \leq Q_f(x,x) \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

Így Q_0-ra is megvan ez a korlát, és

$$Q_0(x,x) = \langle A_0 x, x \rangle$$

valamilyen $A_0 \in \mathcal{B}(H)$-ra Ekkor $A_f \xrightarrow{w} A_0$ is igaz, és $A_0 \in \mathcal{A}$, mert $\mathcal{A}$ gyenge-zárt.

Tehát ezen A_0-hoz létezik egy f_0 függvény. Ez az f_0 a szuprémuma lesz az $f \in \mathcal{F}$ függvényrendszernek.

Erre az f_0-ra belátható, hogy f_0 egy kell legyen $\overline{U}$-n kívül, de 0 kell legyen U-n.

ehhez folytonos függvényeket kell konstruálni példaként

Így

$$f_0 = \chi_{\overline{U}^c}$$

ami csak úgy folytonos, ha U zárt és nyílt is. □

Megjegyzés: ez a tér valamilyen széteső Stone tér (van nyílt-zárt bázisa).

10.2. Lemma. *Legyenek $P_n \in \mathcal{B}(H)$ $(n \in \mathbb{N})$ kommutáló projekciók.*

$$A := \sum_n \frac{1}{3^n} P_n$$

Ekkor

$$C^*(A) = \underbrace{C^*(\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}})}_{\mathcal{A}:=}$$

Bizonyítás. A $\subset$ tartalmazás trivi.

$\mathcal{A}$-t beazonosítom a $\widehat{\mathcal{A}}$-en folytonos függvényekkel. Akkor $C^*(A) \leftrightarrow$ ezen folytonos függvények részalgebrájával.

A projekciókhoz χ_{F_n} tartoznak valamilyen $F_n \subset \widehat{\mathcal{A}}$ nyílt-zárt halmazokkal. Ekkor

$$A \leftrightarrow \sum_n \frac{1}{3^n} \chi_{F_n}$$

Ezeknek az a tulajdonságuk, hogy ha két helyen megegyezik két függvényérték, akkor minden tag a szummában is egyenlő kell legyen.

$$\sum_n \frac{1}{3^n} \chi_{F_n}(t) = \sum_n \frac{1}{3^n} \chi_{F_n}(s) \Rightarrow \chi_{F_n}(t) = \chi_{F_n}(s) \ \forall n$$

Mert a karakterisztikus függvények értékkészlete $[0,1]$.

Ezért A szeparál! és $C^*(\{P_n\})$ tartalmazza 1-et.

Így Stone–Weierstrass miatt $C^*(A) = C^*(\{P_n\})$. □

10.3. Következmény. $W^*(A) = W^*(\{P_n\})$

10.4. Lemma. *Ha H szeparabilitás Hilbert tér, akkor $\mathcal{B}(H)$ (zárt) egységgömbje az erős operátor topológiában metrizálható és szeparábilis.*

Bizonyítás. Legyen $\{x_n\}$ sűrű halmaz H egységgömbjében.

$$\operatorname{dist}(A, B) \coloneqq \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{\|(A-B)x_n\|}{1 + \|(A+B)x_n\|}$$

$$A_n \overset{\text{dist}}{\to} A \Leftrightarrow A_n x_i \to A x_i \ \forall i \in \mathbb{N}$$

Ami pedig ekvivalens azzal, hogy

$$A_n \overset{\text{s}}{\to} A$$

Ez nyilván metrika, ez könnyű.

Szeparábilitás: Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$ hogy $\|A\| < 1$. e_n O.N.B, $P_n \coloneqq$ projekció az első n bázisvektorra. Ekkor $P_n \overset{\text{s}}{\to} I$

$$\underbrace{P_n A}_{\text{véges rangú}} \overset{\text{s}}{\to} A$$

$$P_n A = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

Legyen $\{z_n\}$ sűrű halmaz H-ban. Ekkor $\sum x_i \otimes y_i \approx \sum z_k \otimes z_l$ operátor normában.

$$\|\sum \underbrace{z_k \otimes z_l}_{\text{megszámlálható sok operátor az egységgömbben}} \| \leq 1$$

Vagyis akármilyen egynél kisebb normájú A-t meg tudok közelíteni ilyen véges rangúakkal.

Egy 1 normájút is meg tudok így közelíteni. Így ezek sűrűen vannak a zárt egységgömbben az erős topológia szerint. $\square$

10.5. Tétel. *Legyen H szeparabilitás Hilbert tér, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(H)$ kommutatív Neumann-algebra. Ekkor $\exists A \in \mathcal{A}$ önadjungált, hogy $W^*(A) = \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. $\mathcal{A}$ egységgömbje szeparábilis az erős operátor topológiában. Az $\mathcal{A}$-beli projekciók $\mathcal{P}$ halmaza szintén szeparábilis (az erős operátor topológiában). Ekkor $T \in \mathcal{A}$ esetén

$$T = \underbrace{\frac{T+T^*}{2}}_{\text{önadjungált}} + i\frac{T-T^*}{2i} \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$$

önadjungáltakat lehet operátor norma topológiában közelíteni $\sum \lambda_i Q_i$ alakban, ahol Q_i spektrál projekció. Így T közelíthető erős operátor topológiában $\sum \gamma_n P_n$ alakban.

Erre $\mathcal{A} = W^*(\{P_n\}) = W^*(\underbrace{A}_{\sum \frac{1}{3^n} P_n})$ □

10.6. Megjegyzés. *C^*-ra nem igaz.*

biz

10.7. Következmény. *Ha H szeparabilitás Hilbert tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ kommutatív Neumann-algebra, akkor $\mathcal{A}$ izometrikusan *-izomorf a számegyenes egy kompakt részhalmazán vett véges Borel mértékhez tartozó $\mathbb{L}^\infty$ térrel.*