Vektoralgebra

Vektorok lineáris kombinációja

1. Feladat. Mutassa meg, hogy az $A(1,2,1)$, a $B(-1,0,2)$ és a $C = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$ pontok egy egyenesre esnek.

(*lineáris összefüggőség definíciójából köv.*)

2. Feladat. Írja fel a $\mathbf{v}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként
a) $\mathbf{v}(\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{8})$; $\mathbf{a}(\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{2})$, $\mathbf{b}(\mathbf{1},\mathbf{6},-\mathbf{1})$, $\mathbf{c}(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{0})$
b) $\mathbf{v}(\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{7})$; $\mathbf{a}(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})$, $\mathbf{b}(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})$, $\mathbf{c}(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1})$
c) $\mathbf{v}(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{2})$; $\mathbf{a}(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2})$, $\mathbf{b}(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})$, $\mathbf{c}(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})$

(a) $\mathbf{v} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$; b) $\mathbf{v} = 11\mathbf{a} - \mathbf{b} - 7\mathbf{c}$; c) $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$)

3. Feladat. Döntse el az alábbi vektorokról, hogy lineárisan összefüggőek vagy lineárisan függetlenek:
a) $\mathbf{a}(-9,9,3), \mathbf{b}(1,0,2)$ és $\mathbf{c}(1,1,1)$
b) $\mathbf{a}(7,0,0), \mathbf{b}(8,0,1)$ és $\mathbf{c}(0,0,1)$
c) $\mathbf{a}(0,1,2), \mathbf{b}(1,1,0)$ és $\mathbf{c}(1,-1,2)$
d) $\mathbf{a}(2,-2,1), \mathbf{b}(8,2,1)$ és $\mathbf{c}(10,0,2)$

(a) független; b) összefüggő; c) független; d) összefüggő;)

4. Feladat. Hogyan válasszuk az α paramétert, hogy az $\mathbf{a}(1,\alpha,1), \mathbf{b}(0,2,3)$ és $\mathbf{c}(-1,1,3)$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek?

($\alpha = 5/3$)

5. Feladat. Számítsa ki annak a pontnak a koordinátáit, amely
a) az $A(5,2,-1)$ és $B(-3,0,4)$ pontokat összekötő szakaszt $3:2$ arányban osztja.
b) az $A(2,0,3)$ és $B(-5,1,7)$ pontokat összekötő szakaszt $7:2$ arányban osztja.

(a) $P(1/5, 4/5, 2)$; b) $P(-39/9, 7/9, 55/9)$)

6. Feladat. Adottak $A(4,-1,3)$ és $B(6,5,1)$ pontok, határozza meg a $C(1,y,z)$ pont második és harmadik koordinátáját, ha a C pont az AB szakasz egy pontja. Milyen arányban osztja a C pont a szakasz?

($C(5,0,-2)$; arány: $1:1$)

7. Feladat. Írjunk fel olyan 4 hosszúságú vektort, amely párhuzamos az $\mathbf{a}(0,4,3)$ vektorral.

($(0, 16/5, 12/5)$)

8. Feladat. Az $ABCD$ paralelogramma három csúcsa $A(1,1,1), B(2,2,1)$ és $C(3,-1,1)$. Számítsuk ki a negyedik, D pont koordinátáit, határozzuk meg az átlók F metszéspontját.

($D(1,-2,1)$; $F(2,0,1)$)

9. Feladat. Az $ABCD$ tetraéder $\overrightarrow{AB}$ élvektora $(4,3,-2)$, $\overrightarrow{AC}$ élvektora $(2,-1,5)$ és $\overrightarrow{AD}$ élvektora $(6,4,9)$. Számítsuk ki az ACD háromszög súlypontjába mutató helyvektort és a tetraéder súlypontjába mutató helyvektort is. (Segítség: mivel az A pontból kiinduló helyvektorok adottak, így tekinthetjük A pontot az origónak)

($S_{ACD}(8/3, 1, 14/3)$; $S_{tetra}(3, 3/4, 3)$)

Vektorok skaláris, vektoriális és vegyes szorzata

10. Feladat. Számítsa ki t értékét, ha
a) $\mathbf{a}(3,-6,1)$ merőleges $\mathbf{b}(12,4,t)$-re,
b) $\mathbf{a}(3,1,-1)$ merőleges $\mathbf{b}(5,-1,t)$-re,
c) $\mathbf{a}(1,t,1)$ és $\mathbf{b}(-1,2,1)$ vektorok hajlásszöge 60 fok.

(a) $t=-12$; b) $t=14$; c) $t=\sqrt{\frac{12}{10}}$)

11. Feladat. Számítsa ki , hogy
a) az $\mathbf{a}(1,2,1)$ és a $\mathbf{b}(5,-3,4)$ vektorok mekkora szöget zárnak be,
b) a $\mathbf{v}(4,-1,8)$ mekkora szöget zár be a három koordinátatengely pozitív felével,

(a) $80°$; b) $27.266°$, $96.38°$, $63.61°$;)

12. Feladat. Az alábbi vektorpárok közül melyik lehet rombusznak, melyik téglalapnak a két szomszédos oldalát megadó vektor
a) $\mathbf{a}(3,5,-4)$, $\mathbf{b}(2,-10,-11)$
b) $\mathbf{a}(1,-10,-7)$, $\mathbf{b}(2,5,-11)$.

(a) téglalap; b) rombusz)

13. Feladat. Számítsa ki
a) az $\mathbf{a}(1,2,1)$ vektor $\mathbf{v}(5,-3,4)$ irányvektorral párhuzamos komponensét,
b) az $A(1,-2,3)$ és $B(4,-4,3)$ pontok által meghatározott $\overrightarrow{AB}$ vektornak a $C(2,4,3)$, $D(8,6,6)$ pontok által meghatározott $\overrightarrow{CD}$ vektorral párhuzamos és merőleges komponensekre való felbontását,
c) az $A(3,5,1)$ és $B(6,-2,1)$ pontokat összekötő vektor az x- és y-tengelyek és a z-tengelyre merőleges szögfelezőjével párhuzamos komponensét,
d) az $\mathbf{a}(2,-3,8)$ vektor merőleges vetületének hosszát a $\mathbf{b}(1,-9,3)$ irányvektorra és a $\mathbf{b}$ vektor merőleges vetületének hosszát az $\mathbf{a}$ vektorra.

(a) $(3/10,-9/50,6/25)$; b) $(12/7,4/7,6/7)$, $(9/7,-18/7,-6/7)$;
c) $(2,2,0)$; d) $53/\sqrt{91}$, $53/\sqrt{77}$)

14. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbf{a}(1,2,3)$ és $\mathbf{b}(4,-1,2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét.

($\sqrt{230}$)

15. Feladat. Számítsuk ki az $\mathbf{a}(3,4,12)$, $\mathbf{b}(10,5,-5)$ és $\mathbf{c}(-9,2,6)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

(840)

16. Feladat. Számítsuk ki az $A(5,4,0)$, $B(0,5,-1)$ és $C(2,0,-2)$ pontok által meghatározott háromszög területét.

(12.4)

17. Feladat. Egy háromszög csúcsai $A(1,5,6)$, $B(-2,-1,0)$ és $C(2,2,1)$ pontok. Számítsuk ki az AC oldalhoz tartozó magasságot.

(4.76)

18. Feladat. Számítsuk ki a tetraéder térfogatát, ha csúcsai $A(3,-1,-1)$, $B(5,-2,3)$, $C(4,0,2)$ és $D(5,0,1)$ pontok. (1)

19. Feladat. Mekkora a háromszög kerülete és területe, ha két csúcsa $A(2,3,5)$ és $B(4,-3,0)$ és súlypontja $S(3,2,1)$.

($C(-3,6,-2)$; T=; K=$\sqrt{65}+\sqrt{86}+\sqrt{59}$;)

20. Feladat. Kössük össze az origót az $A(10,-5,10)$, a $B(-11,-2,10)$ és a $C(-2,-14,-5)$ pontokkal. Vizsgáljuk meg és igazoljuk, hogy ezek a szakaszok egy kocka egy csúcsból kiinduló élei. Mekkora a kocka térfogata?

(V=3375;)