Bsc/A3/Gé/1.HF/2011 őszi félév (V. Nagy)

Leadási határidő: az 1. ZH hetének gyakorlatán (7. hét) a gyak. vezér részére (olvashatóan, kézzel írva!)

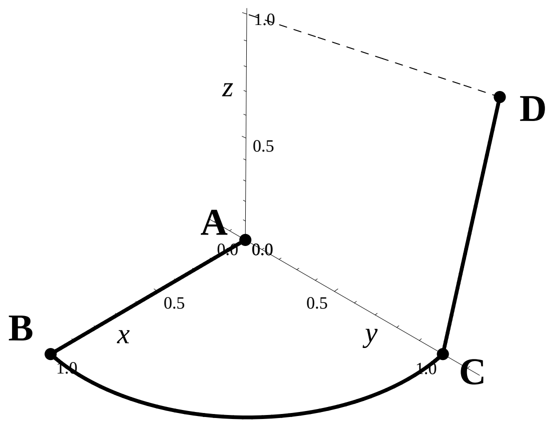
1. Legyen $\underline{v}(\underline{x}) = (2y^2x^2, 2x - y^3, z^3 - 2xy)^\top$, $\underline{g}(\underline{x}) = (\frac{x}{y}, \sqrt{xyz}, 2z + y)^\top$, $\underline{x}_0 = (1,1,1)^\top$.
   (a) $\operatorname{div} \underline{v}, \operatorname{rot} \underline{v}, \underline{\underline{J}}_{\underline{v}} = ?$
   (b) $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}_0), \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{x}_0), \underline{\underline{J}}_{\underline{v}}(\underline{x}_0) = ?$
   (c) $\nabla(\underline{v} \cdot \underline{g}) = ?$, $\nabla \times (\underline{v} \times \underline{g}) = ?$, $\nabla \cdot (\underline{v} \times \underline{g}) = ?$
   (d) Adjon közelítést $\underline{v}(\underline{\tilde{x}})$-ra a totális derivált segítségével, ha $\underline{\tilde{x}} = (0.99; 1.02; 1.08)^\top$

2. Legyen $f(\underline{x}) = 2xy + zx^2, \underline{v}(\underline{x}) = (-x, y + z, -zx)^\top$. Mutassa meg, hogy
   (a) $\operatorname{div}(f \cdot \underline{v}) = f \cdot \operatorname{div}(\underline{v}) + \underline{v} \cdot \operatorname{grad}(f)$
   (b) $\operatorname{rot}(f \cdot \underline{v}) = f \cdot \operatorname{rot}(\underline{v}) + \operatorname{grad}(f) \times \underline{v}$

3. $\underline{w}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, adja meg a görbe ívhosszát és geometriai középpontját!

4. Legyen a C görbe az $A(1, -1, 2)$ és $B(5, 0, -3)$ pontokat összekötő szakasz.
   (a) $\int_C (2x - 3y + z)\,\mathrm{d}\, s = ?$
   (b) $\int_C (xy\underline{i} - zx\underline{j} + 2yz\underline{k})\underline{\mathrm{d}\, x} = ?$

5. (a) $\int_C (x^2 y, x - z, xz)\underline{\mathrm{d}\, x} = ?$, ha $C: y = x^3, 0 \le x \le 2, z = 2$
   (b) $\int_C (x^2, y^2, z^2)\underline{\mathrm{d}\, x} = ?$, ha $C: AB$ szakasz $+ BC$ negyedkörív $+ CD$ szakasz .

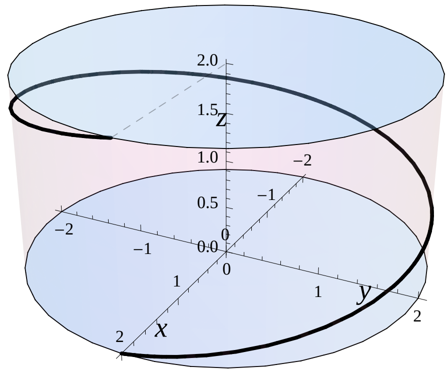


6. (a) Határozza meg a λ értékét úgy, hogy az alábbi vektormező potenciálos legyen!

$$(x^2 + 5\lambda y + 3yz, 5x + 3\lambda xz - 2, (2 + \lambda)xy - 4z)^\top$$

   (b) Adjon meg erre a λ-ra egy skalárpotenciált!

(c) $\int_C \underline{v}(\underline{x})\underline{\mathrm{d}\,x} =?$, ha C egy csavarvonal egy menete ($r=2, h=2$).



7. Legyen $\underline{w}(\underline{x}) = (z-y)\underline{i} + (x+z)\underline{j} - (x+y)\underline{k}$.

   (a) Mutassa meg, hogy $\underline{w}$-hez létezik vektorpotenciál!

   (b) Adjon meg egy vektorpotenciált!

   (c) $\iint_S \underline{w}\ \underline{\mathrm{d}\,F} =?$ ha $S : x^2+y^2+z^2=4, x \geq 0$

8. Számítsa ki az alábbi első fajú felületi integrálokat: $\iint_{S_i} f\,\mathrm{d}\,F$, ha $f(x,y,z) = 2x-3y+z$!

   (a) $S_1 : A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,3)$ háromszöglap

   (b) $S_2 : x^2+y^2+z^2=4, x \geq 0$ (félgömbfelület)

   (c) $S_3 : x^2+y^2=9, -1 \leq z \leq 2$ (hengerpalást)

9. Számítsa ki az alábbi másodfajú felületi integrálokat: $\iint_{S_i} \underline{v}\,\underline{\mathrm{d}\,F}$, ha $\underline{v}(\underline{x}) = 3yx\underline{i} + zy\underline{j} - 2x\underline{k}$ és S_i az előző feladatban szereplő felületek!

10. Mutassa meg, hogy teljesül a Stokes tétel, ha $\underline{v}(\underline{x}) = (xy^2, y^2, y^2z)^\top$ és $S : x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0$!

11. Legyen $\underline{v}(\underline{x}) = (x+2y, z+y, 2x-z)^\top$, S legyen az $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ gömb és az $x-2y+3z=0$ sík metszeteként előálló körlap.

$$\iint_S \operatorname{rot}\underline{v}\ \underline{\mathrm{d}\,F} =?$$

    Használjon Stokes tételt!

12. Legyen $\underline{v}(\underline{x}) = (xz, xy, -z)^\top$ és legyen a G test az $x^2+y^2 \leq z^2$ kúp, ∂G legyen a határfelülete: alaplap és palást. Mutassa meg, hogy teljesül Gauss tétele!

13.

$$\iint_S (e^{yz}+x, \cos xz^2 + 2y, x^2y^2+z)^\top \underline{\mathrm{d}\,F} =?$$

    ha $S : x^2+y^2+z^2=4, z \geq 0$ (Használja Gauss tételét!)