8. gyakorlat
Matematika A2

1. Határozzuk meg a következő függvénysorok D értelmezési tartományat, K konvergenciatartományát, és s összegfüggvényét:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z)^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{n(n+1)}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$

2. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok r konvergenciasugarát, adjuk meg a K konvergencia-intervallumát, továbbá döntsük el, hogy K határpontjaiban konvergens-e:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n-1)}$

3. Számítsuk ki az alábbi komplex változós hatványsorok r konvergenciasugarát, és adjuk meg a konvergenciakör z_0 középpontját:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n^2 2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(z+1-i)^n}{n!}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1+2ni}{n+2i})^n z^n$

4. Írjuk fel a következő függvények Maclaurin-sorát és állapítsuk meg, hogy ez a hatványsor mely intervallumban állítja elő a függvényt:

   a) $\sin x$ b) a^x c) e^{-x^2} d) shx e) $ch\frac{x}{2}$ f) $x\ln(x+1)$
   g) $\ln(1-x^2)$ h) $\frac{x}{2-x}$ i) $\frac{1}{1-2x^2}$ j) $arctgx$ k) $\frac{1}{x^2-5x+6}$ l) $\cos^2 x$

5. Határozzuk meg a következő hatványsorok s összegfüggvényét és K konvergenciaintervallumát:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{a^{n+1}}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{na^{n-1}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

6. Számítsuk ki a következő függvények $x=a$ helyen, t tizedesjegyre kerekített értékét a függvény egy alkalmas Taylor-sora segítségével:

   a) e^x; $a=1,\ t=4$ b) $\sin x$; $a=\frac{\pi}{60},\ t=5$ c) $\ln x$; $a=2,\ t=4$

7. Határozzuk meg az alábbi számsorok összegét alkalmasan választott hatványsorok összegfüggvénye segítségével:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

8. Írjuk fel a $2p$ szerint periodikus f valós függvény Fourier-sorát, és vizsgáljuk meg, hogy mely helyeken állítja elő a sor a függvényt (a függvényt a $(-p,p]$ intervallumon adjuk meg):

   a) $f(x)=\pi^2-x^2,\quad -\pi \le x \le \pi$ b) $f(x)=\sin x,\quad -\pi/2 < x \le \pi/2$
   c) $f(x)=|x|,\quad -\pi < x \le \pi$ d) $f(x)=e^x,\quad -1 < x \le 1$

9. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét a $2p$ szerint periodikus f valós függvény Fourier-sora segítségével:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},\quad f(x)=x^2,\quad -\pi \le x \le \pi$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},\quad f(x)=|x|,\quad -\pi < x \le \pi$
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},\quad f(x)=\mathrm{sgn}x,\quad -\pi < x \le \pi$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1},\quad f(x)=|\sin x|,\quad -\pi < x \le \pi$