6. gyakorlat
Matematika A2

1. Adjuk meg annak a T lineáris transzformációnak a standard mátrixát, amelyre
   a) $T : (1,0) \mapsto (3,1)$, $(1,1) \mapsto (-1,2)$
   b) $T : (2,1) \mapsto (1,0)$, $(0,2) \mapsto (2,6)$
   c) $T : (1,1,0) \mapsto (0,1,4)$, $(1,0,1) \mapsto (1,2,4)$, $(0,1,1) \mapsto (-1,3,2)$.

2. Jelölje S a síknak az $y = x$ egyenesre való tükrözését, T pedig az origó körüli $+60°$-os forgatást. Írjuk fel S és T műtrixát a standard bázisban!

3. Jelölje T_1 a síknak az x tengylere, T_2 az y tengelyre való tükrözését, S_1 és S_2 pedig a síknak az x illetve y tengelyre való merőleges vetítését. Adjuk meg a $T_1 + T_2$, $S_1 + S_2$, T_1T_2 illetve S_1S_2 transzformációkat!

4. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisban!
   a) $T : x \mapsto Ax$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1,2,0),(1,1,-1),(1,0,-1)\}$, $[T]_{\mathcal{B}} =?$
   b) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ahol $\mathcal{B}$ az a) részben szereplő bázis. $[T]_{\{i,j,k\}} =?$
   c) $T : (1,2) \mapsto (2,4)$, $(-1,3) \mapsto (1,-3)$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(-1,3)\}$, $[T]_{\mathcal{B}} =?$, $[T]_{\{i,kj\}} =?$

5. Adjuk meg (számolás nélkül) a következő lineáris transzformációk sajátvektorait, sajátértékeit, magterét és képterét:
   a) a 3. feladatban szereplő transzformációk;
   b) az $x - y - 2z = 0$ síkra való tükrözés $\mathbb{R}^3$-ban;
   c) az x tengelyre való $(1,1)$ irányű vetítés $\mathbb{R}^2$-ben;
   d) $r \mapsto (1,2,3) \times r$ az $\mathbb{R}^3$-ban.

6. Írjuk fel a következő mátrixok karakterisztikus polinomját, majd számítsuk ki sajátértékeit és sajátvektorait! Melyek diagonalizálhatóak $\mathbb{R}$ fölött?
   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7. Van-e a síkban olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvekltora? És a térben? Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora?

8. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlóak $\mathbb{R}$ fölött!
   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát: $(1,5,3)$, $(3,0,-1)$. Határozzuk meg A összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt, és a diagonális alakja segítségével számítsuk ki A n-edik hatványát!