1. Adjuk meg annak a T lineáris transzformációnak a standard mátrixát, amelyre

a) $T : (1,0) \mapsto (3,1),\ \ (1,1) \mapsto (-1,2)$.

b) (**Hf**) $T : (2,1) \mapsto (1,0),\ \ (0,2) \mapsto (2,6)$

c) $T : (1,1,0) \mapsto (0,1,4),\ \ (1,0,1) \mapsto (1,2,4),\ \ (0,1,1) \mapsto (-1,3,2)$.

2. Jelölje S a síknak az $y = x$ egyenesre való tükrözését, T pedig az origó körüli $+60°$-os forgatást. Írjuk fel S és T mátrixát a standard bázisban!

3. Jelölje T_1 a síknak az x tengelyre, T_2 az y tengelyre való tükrözését, S_1 és S_2 pedig a síknak az x illetve y tengelyre való merőleges vetítését. Adjuk meg a $T_1 + T_2$, $S_1 + S_2$, T_1T_2, illetve S_1S_2 transzformációkat!

4. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisban!

a) $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1,2,0),(1,1,-1),(1,0,-1)\}$, $[T]_{\mathcal{B}} = ?$

b) (**Hf**) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, ahol $\mathcal{B}$ az a) részben szereplő bázis. $[T]_{\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}} = ?$

c) (**Hf**) $T : (1,2) \mapsto (2,4),\ (-1,3) \mapsto (1,-3)$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(-1,3)\}$. $[T]_{\mathcal{B}} = ?$, $T_{\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}} = ?$

5. Adjuk meg (számolás nélkül) a következő lineáris transzformációk sajátvektorait, sajátértékeit, magterét és képterét:

a) a 3. feladatban szereplő transzformációk;

b) (**Hf**) az $x - y - 2z = 0$ síkra való tükrözés $\mathbb{R}^3$-ben;

c) (**Hf**) az x tengelyre való $(1,1)$ irányú vetítés $\mathbb{R}^2$-ben;

d) $\mathbf{r} \mapsto (1,2,3) \times \mathbf{r}$ az $\mathbb{R}^3$-ben.

6. Írjuk fel a következő mátrixok karakterisztikus polinomját, majd számítsuk ki a sajátértékeiket és sajátvektoraikat! Melyek diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött? (**Hf**: A, B, C, E)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. (**Hf**) Van-e a síkban olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora? És a térben? Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora?

8. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók $\mathbb{R}$ fölött:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát: $(1,5,3)$ és $(3,0,-1)$. Határozzuk meg A összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt, (**Hf**) és a diagonális alakja segítségével számítsuk ki A n-edik hatványát!

A házi feladatok megoldása

1. b) A linearitás felhasználásával kiszámíthatjuk, hogy mi az **i**, **j** alapvektorok képe: $T(0,1) = T(\frac{1}{2}(0,1)) = \frac{1}{2}T(2,6) = (1,3)$, $T(2,0) = T((2,1)-(0,1)) = T(2,1) - T(0,1) = (0,-3)$, és $T(1,0) = \frac{1}{2}T(2,0) = (0,-\frac{3}{2})$. Így T standard mátrixa: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$.

Másképp: azt az A mátrixot keressük, amelyre

$A\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, azaz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Ezt szimultán egyenletrendszerként megoldva:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \mapsto \mapsto \cdots \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right],$$

tehát $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$.

4. b) A $\mathcal{B}$ elemeiből mint oszlopokból álló P mátrixra $P^{-1}[T]_{\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}}P = [T]_\mathcal{B}$, és így $[T]_{\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}} = P[T]_\mathcal{B}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} -10 & 4 & -10 \\ 0 & -1 & -5 \\ 13 & -6 & 10 \end{bmatrix}$.

c) Láthatjuk, hogy a $\mathcal{B}$ bázis két eleme a T-nek 2, illetve -1 sajátértékhez tartozó sajátvektora, így $[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, az áttérés mátrixa pedig $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, amire $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, így $[T]_{\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}} = P[T]_\mathcal{B}P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 18 & 1 \end{bmatrix}$. (De a $[T]_{\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}}$ mátrixot az $X\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ mátrixegyenlet megoldásával is megkaphatjuk.)

5. b) A sajátvektorok a sík (nem nulla) vektorai (a sajátaltér bázisa pl. $\{(1,1,0),(2,0,1)\}$) 1 sajátértékkel, és a sík normálvektorai ($(1,-1,-2)$ nem nulla skalárszorosai) -1 sajátértékkel. A transzformáció magtere $\{0\}$, képtere pedig az egész $\mathbb{R}^3$.

c) A sajátvektorok az $(1,0)$ többszörösei 1 sajátértékkel, és $(1,1)$ többszörösei 0 sajátértékkel. A magtér $\operatorname{span}\big((1,1)\big)$, a képtér $\operatorname{span}\big((1,0)\big)$.

6. Az A karakterisztikus polinomja $|A-\lambda I| = \lambda^2-4\lambda+3$, a sajátértékek 1 és 3, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1,-1)$, illetve $(1,1)$ nem nulla skalárszorosai.

A B karakterisztikus polinomja $|B-\lambda I| = \lambda^2-5\lambda-14$, sajátértékei 7 és -2, az ezekhez tartozó sajátvektorok $(1,1)$, illetve $(-4,5)$ nem nulla skalárszorosai.

A C karakterisztikus polinomja $(3-\lambda)(5-\lambda)$, sajátértékei 3 és 5, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(2,-9)$, illetve $(0,1)$ nem nulla skalárszorosai.

A, B, C mindegyike diagonalizálható, mert van $\mathbb{R}^2$-ben sajátvektoraikból álló bázis.

E karakterisztikus polinomja $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$, sajátértékei 1, 2, 3. A mátrix diagonalizálható, mert a három különböző sajátértékhez tartozó sajátvektora három független vektor, és így bázist alkot $\mathbb{R}^3$-ben ($(1,-1,0)$, $(-2,1,2)$, illetve $(-1,1,2)$ nem nulla skalárszorosai).

7. Az origó körüli α szögű forgatásnak nincs a síkban sajátvektora, ha α nem a π egész számszorosa. $\mathbb{R}^3$-ben minden transzformációnak van sajátvektora, mert a karakterisztikus polinom harmadfokú, így van valós gyöke. Két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektor összege nem lehet sajátvektor, tehát csak azoknak a transzformációknak lesz minden nem nulla vektor sajátvektora, amelyeknek egyetlen λ sajátértéke van, és a transzformáció ezzel a λ-val való szorzás.

9. $A\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\30\\18\end{bmatrix}=6\cdot\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}$, és $A\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$, tehát az első vektor a 6, a második 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel a mátrix szimmetrikus, van sajátvektorokból álló ortogonális bázisa, és a megadott vektor ennek két eleme, tehát a harmadikat (skalár szorzótól eltekintve) megkaphatjuk úgy, ha vesszük az két vektor vektoriális szorzatát: $(-5,10-15)$, vagy az ezzel párhuzamos $(1,-2,3)$ vektor. Mivel $A\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}=(-1)\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$, a harmadik sajátvektor a -1 sajátértékhez tartozik. Ebből azt kapjuk, hogy a $P=\begin{bmatrix}1&3&1\\5&0&-2\\3&-1&3\end{bmatrix}$ mátrixra $P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$. $P^{-1}=\frac{1}{70}\begin{bmatrix}2&10&6\\21&0&-7\\5&-10&15\end{bmatrix}$, és

$$A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&1\\5&0&-2\\3&-1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6^n&0&0\\0&1&0\\0&0&(-1)^n\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{70}\begin{bmatrix}2&10&6\\21&0&-7\\5&-10&15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot6^n+63+5\cdot(-1)^n & 10\cdot6^n-10\cdot(-1)^n & 6^{n+1}-21+15\cdot(-1)^n\\ 10\cdot6^n-10\cdot(-1)^n & 50\cdot6^n+20\cdot(-1)^n & 30\cdot6^n-30\cdot(-1)^n\\ 6^{n+1}-21+15\cdot(-1)^n & 30\cdot6^n-30\cdot(-1)^n & 18\cdot6^n+7+45\cdot(-1)^n\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{70}.$$