**5. gyakorlat**
**Matematika A2**

1. Számítsuk ki a következő determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

2. Melyik igaz az alábbi determinánsos összefüggések közül minden $n \times n$-es mátrixra?

a) $|AB| = |B^T A|$ b) $|A+B| = |A| + |B|$ c) $|2A| = 2|A|$

d) $|A^2 - I| = |A+I| \cdot |A-I|$ e) $|A^2 - B^2| = |A+B| \cdot |A-B|$

3. (Vandermonde-determináns) Bizonyítsuk be $n$-re vonatkozó teljes indukcióval, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

4. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a Vandermonde-determináns felhasználásával!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix}$

5. Számítsuk ki a mátrixok inverzét az aldeterminánsaik segítségével!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6. A Cramer-szabály felhasználásával határozzuk meg $y$ értékét az alábbi egyenletrendszerek megoldásában!

a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & -2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \end{array}$

7. Melyikek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik igen, azt írjuk fel valamilyen mátrixszal való balszorzásként!

a) $(x,y,z) \mapsto (x+1, y+1, z+1)$ b) $(x,y,z) \mapsto (x-2y, z, x+y+z)$

c) $(x,y,z) \mapsto (x+2y, 3x-y)$ d) $(x,y) \mapsto (xy, 0)$