2. gyakorlat
Matematika A2

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját!

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{pmatrix}$

2. Mi lehet egy lineáris egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ kibővített mátrixának a rangja, ha tudjuk, hogy
   a) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és az ismeretlenek száma 2;
   b) az egyenletrendszernek nincs megoldása, és $\mathbf{A}$ rangja 3;
   c) az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, és $\mathbf{A}$ 3×2-es mátrix?

3. Tudjuk, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek az $(1, 2, -1)$ és a $(0, 1, 3)$ vektorok megoldásai. Adjuk meg az egyenletrendszernek még legalább két további megoldását! Mit mondhatunk az $\mathbf{A}$ mátrix rangjáról, ha az egyenletrendszer
   a) homogén; b) inhomogén?

4. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?
   a) $(1, 2, -1, 0), (1, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 3)$ b) $(0, 1, 3), (2, 1, -1), (4, 3, 1)$

5. Állítsuk elő a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -1, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -2, -1)$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = (0, -1, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (3, 2, -2, 3)$ vektorokat, ha lehetséges!

6. Alteret alkotnak-e a következő egyenletek által meghatározott réaszhalmazai $\mathbb{R}^3$-nak?
   a) $|\mathbf{v}| = 1$ b) $x + 2y + z = 0$ c) $x + 2y + z = 1$ d) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ e) $x^3 + y^3 + z^3 = 0$

7. Vegyük $\mathbb{R}^3$-ban a $\mathcal{B} = \{(1, 3, -1), (0, 1, 1), (2, -1, 0)\}$ bázist. Melyik az a $\mathbf{v}$ vektor, amelynek $\mathcal{B}$ szerinti koordinátás alakja $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1, 2, -1)$? Mi a $\mathbf{w} = (3, 0, -3)$ vektor $\mathcal{B}$ szerinti koordinátás alakja?

8. Adjuk meg az alábbi mátrixok sorterének, oszlopterének és nullterének egy-egy bázisát!

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

9. Válasszunk ki a $(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0)$ vektorok közül egy maximális független rendszert, és fejezzük ki a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként!

10. Adjuk meg az U merőleges kiegészítő alterének egy bázisát V-ben, ha
    a) $U = Span((1, 2, 0, 1), (3, 1, -1, 1), (1, -3, -1, -1))$, $V = \mathbb{R}^4$; b) $U = Span((1, 2, -1))$, $V = \mathbb{R}^3$!