Bsc/A2/Gé/1.HF/2011 tavaszi félév (V. Nagy)

Leadási határidő: az 1. ZH hetének gyakorlatán (5. hét) a gyak. vezér részére (olvashatóan, kézzel írva!)

Vektorok térben

1. Legyen $A = (3, -2, -3)$, $B = (4, 3, -1)$, $C = (-2, 2, 0)$, $D = (-1, -2, 4)$. (Az A, B, C, D pontokba mutató helyvektorokat jelölje: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$)
   - (a) Mennyi az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által meghatározott parallelogramma területe? $\cos\sphericalangle(\underline{a}, \underline{b}) = ?$
   - (b) Az $\overrightarrow{AD}$ vektort bontsa fel $\overrightarrow{AC}$-vel $\parallel$ és $\overrightarrow{AC}$-re $\perp$ összetevők összegére!
   - (c) $ABC\triangle$ területe $= ?$
   - (d) A, C, D pontok által meghatározott sík egyenletét írja fel!
   - (e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ által meghatározott parallelepipedon térfogata?
   - (f) A, B, C, D pontol által meghatározott tetraéder térfogata?
   - (g) A, C pontok által meghatározott e egyenes egyenlete?
   - (h) Az e egyenes és a B pont távolsága?
   - (i) Adja meg azon f egyenes egyenletét, amely $\perp$ a D, C, B pontok síkjára és átmegy az A ponton!
   - (j) A $\underline{c}, \underline{d}, \underline{b}$ vektorok jobbrendszert alkotnak-e?
   - (k) $2\underline{a}, \underline{b} - \underline{c}, |\underline{c}| \cdot \underline{b}^0$ vektorok lineárisan összefüggőek-e? (egy síkon vannak-e?)
   - (l) Adja meg a $\underline{b}, \underline{c}$ által meghatározott parallelogramma két átlóját és ezek hosszát!

Műveletek mátrixokkal

274 Határozzuk meg az $\underline{A} + \underline{B}, \underline{A} - \underline{B}, 5\underline{B} - \underline{A}$ mátrixokat, ha

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

276 Határozzuk meg az $\underline{AB}$ és $\underline{BA}$ mátrixokat, ha

(b)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

279 Határozzuk meg az $(\underline{AB})\underline{C}$ és $\underline{A}(\underline{BC})$ mátrixokat, ha

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \underline{C} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

285 (a) Bontsuk fel a következő mátrixot egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére!

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

286 Végezzük el a következő szorzásokat!

(a)

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a következő determinánsok értékét

238

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

240

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 3 & -9 & 5 \\ 1 & -4 & -12 \end{vmatrix}$$

244

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Számolja ki az inverzet

287 (a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Mátrixegyenlet

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

289 $\underline{X} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

290 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{X} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

291 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

292 $\underline{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Mennyi a mátrix rangja

293

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

294

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

295

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek (Gauss algoritmus)

Vizsgáljuk a következő egyenletrendszereket megoldhatóság szempontjából. Ha megoldható, akkor írjuk is fel a megoldást.

300

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

302

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

311

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 4\\ 1 & 17 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

312

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & 5 & 1 & -2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

303

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\11\\11\end{bmatrix}$$

307

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-4\\-6\\-4\end{bmatrix}$$

310

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -13\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\3\\-6\end{bmatrix}$$

316

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\1\end{bmatrix}$$

319

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-2\\23\\12\end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszer paraméterrel

A λ paramétertől függően vizsgáljuk és oldjuk meg a következő egyenletrendszereket.

323

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

325

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

327

$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3+\lambda & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 8+\lambda & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 8+\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda+1 \\ \lambda+2 \\ \lambda+2 \end{bmatrix}$$

Sajátérték, sajátvektor

Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait. Szimmetrikus mátrixok esetén az egység-sajátvektorokból mint oszlopvektorokból állítsuk elő az M mátrixot is.

362

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

363

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

364

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

369

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

370

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

373

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Másodrendű görbék (főtengely transzformáció)

377 Ábrázoljuk a következő egyenletekkel adott másodrendű görbéket:

(c) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

(f) $16x^2 - 24xy + 5y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$