A2 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

8. hét - Lineáris transzformációk, bázisok

Elmélet:

Lineáris leképezés mátrixa előáll a bázisvektorok képeként:
$f : \mathbf{v} \to f(\mathbf{v})$, akkor $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{e_1}) & \dots & f(\mathbf{e_i}) & \dots & f(\mathbf{e_n}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$
$\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, \dots \mathbf{T_k}$ transzformációk egymásután fűzése: $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{T_k}(\mathbf{T_{k-1}}(\dots \mathbf{T_2}(\mathbf{T_1}\mathbf{v})\dots)$
Bázistranszformáció V vektortérben: $\mathbf{A}\mathbf{x_B} = \mathbf{x_C}$, ahol $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots \mathbf{b_n}\}, C = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \dots \mathbf{c_n}\}$ a V két bázisa és $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ a bázisáttérés mátrixa olyan, hogy $\mathbf{A^{-1}}\mathbf{b_i} = \mathbf{c_i}$.
Ilyenkor ha a $\mathbf{T_C}$ transzformáció a C bázisban, azaz $\mathbf{x'_C} = \mathbf{T_C}\mathbf{x_C}$, akkor a B bázisban a transzformáció: $\mathbf{x'_B} = \mathbf{A^{-1}}\mathbf{T_C}\mathbf{A}\mathbf{x_B}$, azaz a B bázisban a transzformáció mátrixa: $\mathbf{T_B} = \mathbf{A^{-1}}\mathbf{T_C}\mathbf{A}$

Feladatok:

1. Feladat. Vizsgálja meg, hogy az alábbi transzformációk lineárisak-e! Ha igen, akkor írja fel a leképezés mátrixát:

a) $(x, y, z) \mapsto (2x + z, 3x + 1, x + 4y - z)$
b)$^{\text{hf}}$ $(x, y, z) \mapsto (2x + z, 3x, x + 4y - z)$
c)$^{\text{hf}}$ $\mathbf{v} \mapsto (1, 0, -1) \times \mathbf{v}$
d) $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{v} - \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{a} = (2, 0, -1)$ rögzített
e)$^{\text{hf}}$ $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle \mathbf{a} + 2\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{a} = (1, 1, -3)$ rögzített

2. Feladat. Határozza meg az alábbi $\mathbb{R}^3$-beli lineáris transzformációk mátrixát a természetes bázisban, hajtsa végre a transzformációt a $(3, 2, 1)$ ponton:

a) y-tengely körüli 30°-os forgatás
b)$^{\text{hf}}$ tükrözés az xz-síkra
c) tükrözés az $x = y$ síkra
d)$^{\text{hf}}$ vetítés az yz-síkra
e)$^{\text{hf}}$ z-tengely körüli 60°-os forgatás utáni tükrözés az xy-síkra
f) z-irányú 3-szoros nyújtás utáni xz-síkra vetítés

3. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi vektorok bázist alkotnak-e a megfelelő valós vektortérben, illetve, hogy a c paraméter mely értékeire alkothatnak bázist:

a) $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)$^{\text{hf}}$ $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d)$^{\text{hf}}$ $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ c \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Feladat. Írja fel a megadott $\mathbf{v}$ vektort a B bázisban, határozza meg a természetes bázisról való bázisáttérés mátrixát!

a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b)$^{\text{hf}}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$