A2 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

5-6. hét - Mátrixok: műveletek, determináns, inverz, elemi sorműveletek

Elmélet:

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}, \mathbf{C} = [c_{ij}]_{n\times k}, \lambda \in \mathbb{R}$
$\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{n\times m}, \quad \lambda\mathbf{A} = [\lambda a_{ji}]_{n\times m}, \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times k}, \quad \mathbf{AC} = [\sum_{t=1}^{n} a_{it}c_{tj}]_{m\times k}$
$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}; \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \quad (\mathbf{AC})^T = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A}^T$
$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{AC})$, $(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$

Ha $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ négyzetes és $\mathbf{A}_{ij}$ almátrixot úgy kapjuk, hogy elhadjuk a mátrix $i$edik sorát és $j$edik oszlopát: $\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}\det(\mathbf{A}_{1i})$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} \det(\mathbf{A}_{11}) & -\det(\mathbf{A}_{12}) & \dots & (-1)^{n+1}\det(\mathbf{A}_{1n}) \\ -\det(\mathbf{A}_{21}) & \det(\mathbf{A}_{22}) & \dots & (-1)^{n}\det(\mathbf{A}_{2n}) \\ & & (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij}) & \\ (-1)^{n+1}\det(\mathbf{A}_{n1}) & & \dots & \det(\mathbf{A}_{nn}) \end{pmatrix}^T$$

Elemi sorműveletek: 1) sorok cseréje (det -1-szeres), 2) sorok λ-szorosa (det λ-szoros) 3) egyik sor plusz másik sor számszorosa (det nem változik).

rang($\mathbf{A}$)=lépcsős alakban a nem nulla átlóelemek száma=lineárisan független sorvektorok maximális száma =lineárisan független oszlopvektorok maximális száma=legnagyobb nem nulla determinánsú négyzetes részmátrix mérete.

Feladatok:

1. Feladat. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$,

c) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

d)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 9 \\ 2 & 16 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

f)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^3$,

g)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$, $n = 2, 3, \dots$

2. Feladat.

Adott: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Számítsuk ki:

a)$^{\text{hf}}$ $\mathbf{Av}$, b)$^{\text{hf}}$ $\mathbf{v}^T\mathbf{A}$, c) $\mathbf{v}^T\mathbf{Av}$, d)$^{\text{hf}}$ $\mathbf{BA} - \mathbf{AB}$,
e) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\cdot 2\mathbf{v}$, f) $\det(\mathbf{A})$, g)$^{\text{hf}}$ $\det(\mathbf{AB})$, h) $\mathbf{A}^{-1}$.

3. Feladat. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát! Adja meg, hogy a paraméteres mátrixokban a paraméter mely értékeire lesz a mátrix deteminánsa nulla!

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, b)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, c)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, e)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi mátrixok inverzét! Használjunk mindkét tanult módszert.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, b)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, d)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, b)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, d)$^{\text{hf}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$