A2 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

5. hét - Sorfejtés: hatványsorok, Taylor-sorok, Fourier-sorok

Elmélet:

Hatványsorok: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, az x_0 körül.
Hatványsor konvergenciatartománya intervallum: $I = [?(x_0 - r, x_0 + r)?]$, ahol r a konvergenciasugár.
Hányados és gyökkritériumból: $\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Egyenletes konvergencia miatt a konvergencia-intervallum belsejében tagonként deriválhatunk és integrálhatunk.
Binomiális-sor: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}(x-x_0)^k$, ahol $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

Taylor-sor: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, f függvény sora az x_0 körül,

Maradéktag: $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ahol $|\xi| < |x-x_0|$.

Fourier-sor: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, ha az f függvény $2l$ periodikus és az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(x)\,dx, \quad b_n = 0, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

Feladatok:

1. Feladat. Állítsuk elő az alábbi függvények $x_0 = 0$ pontjához tartozó hatványsorát! Ha lehet többféle módszerrel is dolgozzunk! Állapítsuk meg a sor konvergenciatartományát is!

a) $\cos(5x)$ b)$^{\text{hf}}$ $\cos(\sqrt{x})$ c)$^{\text{hf}}$ $\operatorname{sh}\left(\frac{x}{3}\right)$
d) $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ e) e^{-x^2} f)$^{\text{hf}}$ $\sqrt[3]{e^x}$
g) $(1+x)^3$ h)$^{\text{hf}}$ $(1+x)^{-\frac{1}{3}}$ i) $\frac{x}{4+x^2}$
j)$^{\text{hf}}$ $\sqrt[3]{8+x}$ k)$^{\text{hf}}$ $\ln(1-x^2)$ l) $\operatorname{arctg}(2x)$

2. Feladat. Írjuk fel az alábbi megadott függvények x_0 helyéhez tartozó Taylor-sorát és állapítsuk meg a sor konvergenciatartományát!

a) $\sin(x)$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ b)$^{\text{hf}}$ $\sin(x)$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$
c) $\ln(x)$ $x_0 = 1$ d)$^{\text{hf}}$ $\ln(x)$ $x_0 = e$
e) $2x^3 - x$ $x_0 = \frac{1}{2}$ f) $\frac{x+1}{x+3}$ $x_0 = -1$ és $x_0 = c(\neq -3)$
g)$^{\text{hf}}$ $\sqrt{x+1}$ $x_0 = 3$ h)$^{\text{hf}}$ $\frac{1}{x+1}$ $x_0 = 2, -2$ és $x_0 = c(\neq -1)$

3. Feladat. Határozzuk meg az alábbi értékeket 3 tizedesjegy pontossággal.

a) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$ b)$^{\text{hf}}$ $\arcsin(0.5)$ c) $\sqrt[3]{1.02}$ d)$^{\text{hf}}$ $\sqrt[4]{80}$

4. Feladat. Becsüljük meg az alábbi integrálok értékét a függvények 0 körüli hatványsorának 5.részletösszegének segítségével.

a) $\int_0^{0.5} \sin(x^2)\,dx$ b)$^{\text{hf}}$ $\int_0^{0.2} \cos(3x)\,dx$ c)$^{\text{hf}}$ $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^3}\,dx$

5. Feladat. Ábrázoljuk a függvényeket és határozzuk meg a Fourier-sorukat!

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2k\pi)$

b)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ x & , \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2k\pi)$

c) $f(x) = \begin{cases} x & , \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ -1 & , \text{ha } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2k\pi)$

d)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ x^2 & , \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2k\pi)$

e)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & , \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ 0 & , \text{ha } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2k\pi)$

f)$^{\text{hf}}$ $f(x) = x \quad , \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \qquad f(x) = f(x + k)$

g) $f(x) = x^2 \quad , \text{ha } -1 \leq x < 1 \qquad f(x) = f(x + 2k)$