A2 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

3-4. hét - Függvénysorozatok, függvénysorok

Elmélet:

Az $\{f_n(x)\}$ egyenletesen konvergál $h(x)$-hez H-n, ha $\forall x \in H$ és $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Az $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergál $s(x)$-hez H-n, ha $\forall x \in H$ és $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$, ahol $s_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x)$.

Weierstrass-kritérium: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor **egyenletesen konvergens** I-n, ha $\exists M_n \geq |f_n(x)|, \forall x \in I$ és $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergens.

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens $I = (a, b)$-n, akkor tagonként deriválható és integrálható.

Hatványsorok: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, az x_0 körül.
Hatványsor konvergenciatartománya intervallum: $I = [?(x_0 - r, x_0 + r)?]$, ahol r a konvergenciasugár.
Hányados és gyökkritériumból: $\dfrac{1}{r} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Egyenletes konvergencia miatt a konvergencia-intervallum belsejében:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x - x_0)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Feladatok:

1. Feladat. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Ha lehet adja meg a határfüggvényt!

a) $f_n(x) = \dfrac{n^2 x + 6n}{3n^2 + nx}$ b)$^{\text{hf}}$ $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n^3}x + 2}{n - 1}$ c) $f_n(x) = e^{-nx}$

d)$^{\text{hf}}$ $f_n(x) = \sin^n(x)$ e) $f_n(x) = \left(\dfrac{1}{1 - x^2}\right)^n$ f)$^{\text{hf}}$ $f_n(x) = \left(\dfrac{1}{2 + x}\right)^n$

2. Feladat. Hol konvergensek/abszolút konvergensek az alábbi függvénysorok? Ha lehet adja meg az összegfüggvényt!

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^n$ b)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n(x)$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{n(x^2-2)}$

d)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ e)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$

g)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4 + x^2}$

3. Feladat. Állapítsa meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát. Ha lehet adja meg az összegfüggvényt.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

b)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

c)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!(x-5)^n$

f)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$

g)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(nx)^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{n}\right)^n$

i)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 4^n}$

k)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n\cdot 4^n}$

l)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

m)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n(n-1)\sqrt{n-1}}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$

o)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}}$

p)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$

q) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

r)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}(x+3)^n$

s)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+2}}(x-3)^n$