A2 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

2-3. hét - Numerikus Sorok - Megoldások

Feladatok:

1. Feladat.

a) A részletösszegek sorozata: $s_n = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1}-1$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, a sor nem konvergens.

b) Vegyük észre, hogy minden n értékre $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ebből a részletösszegek sorozata az előző feladathoz hasonlóan számolva: $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, a sor konvergens, és összege 1.

c) Most $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, és $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{5}{6}$. Azaz a sor konvergens, és összege $\frac{5}{6}$.

d) Vegyük észre, hogy $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ebből a részletösszegek sorozata: $s_n = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, mert a szumma $n=2$-vel indul. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, a sor konvergens, és összege 1.

2. Feladat.

a) A geometriai sor alakjában felírva $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-5}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-5)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$, mivel $q = 1/4 < 1$, ezért a sor konvergens, és összege $\frac{-5}{3/4} = \frac{-20}{3}$.

b) Felhasználva, hogy $\left|-\frac{4}{5}\right| < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} = \frac{1}{(-5)^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{45}$, azaz a sor konvergens, és összege $\frac{1}{45}$.

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} = -\frac{3^1}{2^{-2}} - \frac{3^3}{2^1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} = -\frac{51}{2} + 12\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{8}\right)^n$. Mivel $\left|\frac{9}{8}\right| \geq 1$, a fenti sor nem konvergens.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{5^n} = -4 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{5^n} = -4 + \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}\right) + \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^n}\right) = -4 + \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + 3\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{31}{6}$, és a sor konvergens.

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}+(-5)^n}{3^{2n+2}} = \frac{2}{9}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n\right) + \frac{1}{9}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{9}\right)^n\right) = \frac{29}{14}$, és a sor konvergens.

f) A szokásos lépésekkel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1}-2^n}{4^{2n-1}} = \frac{10}{7}$, és a sor konvergens.

3. Feladat.

a) A geometriai sor alakjában felírva: $3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{1}{10^n} = 3\frac{10}{9} - 3 = \frac{1}{3}$.

b) Összegalakban felírva: $25 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{10^4} + 3 \cdot \frac{1}{10^6} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 25 \frac{1}{100^n} = 25\frac{100}{99} - 25 = \frac{25}{99}$.

c) Összegalakban felírva: $20.7 + 25 \cdot \frac{1}{1000} + 3 \cdot \frac{1}{10^5} + 3 \cdot \frac{1}{10^7} + \ldots = \frac{207}{10} + \frac{25}{10} \cdot (\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \ldots) =$

$= \frac{207}{10} + \frac{25}{10} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} = \frac{207}{10} + 25\frac{10}{99} - \frac{25}{10} = \frac{20518}{990}$.

d) Összegalakban felírva: $\frac{28}{100} + \frac{213}{100} \cdot (\frac{1}{1000} + 3 \cdot \frac{1}{10^6} + 3 \cdot \frac{1}{10^9} + \ldots = \frac{28}{100} + \frac{213}{100} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000^n} =$

$= \frac{28}{100} + \frac{2130}{999} - \frac{213}{100} = \frac{28185}{99900}$.

4. Feladat. Első észrevételünk, hogy a feladatban szereplő sorok mind pozitív tagú sorok egy adott indextől kezdve, így a majoráns- és minoráns-elv alkalmazható rájuk.

a) Mivel $\frac{2n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, így a minoráns-elv alapján $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$.

b) A $\frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7} \geq \frac{n^3}{12n^4} = \frac{1}{12n}$ egyenlőtlenség és a minoráns-elv alapján a sor divergens.

c) Most a $\frac{7n^3-7}{n^5+2n^4} \leq \frac{7}{n^2}$ egyenlőtlenséget használjuk, és a majoráns-elv alapján azt kapjuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3-7}{n^5+2n^4}$ konvergens.

d) A $\frac{5n+2}{n^7} \leq \frac{7}{n^6}$ egyenlőtlenség alapján, mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^6} = 7 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ konvergens, a majoráns-elvet alkalmazva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n^7}$ konvergens.

e) Mivel $\ln(n) < n$, ezért $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^7}} \leq \frac{1}{n^{5/2}}$ egyenlőtlenség és a majoráns-elv alapján a sor konvergens.

f) $\frac{2^n+3^{n+1}}{1+6^{n-1}} \leq \frac{6 \cdot 3^n}{\frac{1}{6} \cdot 6^n} = \frac{36}{2^n}$, így a sor konvergens.

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \geq \frac{1}{2n}$, így a sor divergens.

h) $\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} \geq \frac{1}{2n}$, így a sor divergens.

5. Feladat. Mivel a sorok mind pozitív tagú sorok egy adott indextől kezdve, a gyök- és hányadoskritériumok alkalmazhatóak rájuk.

a) A hányadoskritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{7^{n-1}}{(n+2)!}}{\frac{7^{n-2}}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n+2} = 0 < 1$, azaz a sor konvergens.

b) A gyökkritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^{3n}}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^3}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4} = 125 > 1$, azaz a sor divergens.

c) A gyökkritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)^{4n+1}\right)^{\frac{3n}{4n+1}} = \left(e^{-1}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{4}}} < 1$, azaz a sor konvergens.

d) A gyökkritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n^5 2^{3n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5 2^3 \sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2} < 1$, azaz a sor konvergens.

e) A hányadoskritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{3n+3}(n+1)^7}{3^{2n+3}}}{\frac{2^{3n}n^7}{3^{2n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^3(n+1)^7}{n^7 3^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{9} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^7 = \frac{8}{9} < 1$, azaz a sor konvergens.

f) Most $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{5} < 1$, azaz a sor konvergens.

g) A hányadoskritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, azaz a sor konvergens.

h) A hányadoskritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot (n+2)}{(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$, és a sor konvergens.

i) Most a gyökkritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\frac{2}{3}} > 1$, azaz a sor divergens.

6. Feladat.

a) A sor váltakozó előjelű, a $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ sorozat szigorúan csökkenő, és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, tehát a sor Leinbiz-sor, és konvergens. Másrészt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens az előadáson tanultak alapján, így a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sor feltételesen konvergens.

b) Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, azaz a sor nem teljesíti a konvergencia szükséges feltételét, így divergens.

c) Az a) feladat gondolatmenete alapján a sor feltételesen konvergens.

d) A $\frac{2^n}{3^n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ becslést és a majoráns-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+1}$ sor konvergens, így az eredeti sor abszolút konvergens.

e) Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} \neq 0$, a sor divergens.

f) Most $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n = e^{-4} \neq 0$, azaz a sor divergens.