# A2 Gyakorlat
# Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

## 2-3. hét - Numerikus Sorok

**Elmélet:**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens akkor és csak akkor ha $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ konvergens.
Sor konvergenciájának szükséges feltétele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Geometriai sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n = \begin{cases} a\frac{1}{1-q}, & \text{ha } |q|<1, \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } q < -1. \end{cases} \qquad \text{ahol: } s_k = \sum_{n=0}^{k-1} a\cdot q^n = a(1+q+\ldots+q^{k-1}) = a\cdot\frac{1-q^k}{1-q};$$

Harmonikus sor: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens; Hiperharmonikus sor: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$;
Leibniz-sor: a tagok alternálóak, nullsorozatot alkotnak, abszolútértékben monoton csökkenőek.

Pozitív tagú sorokra vonatkozó kritériumok:
*Majoráns krit.:* $\forall n > N$, $0 \leq a_n \leq b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens $\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.
*Minoráns krit.:* $\forall n > N$, $a_n \geq b_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens $\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.
*Hányados krit.:* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, ha $q<1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, ha $q>1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.
*Gyök krit.:* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$, ha $q<1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, ha $q>1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens
*Integrál krit.:* $\exists f(x) > 0$, monoton csökkenő, hogy $\forall n > N$, $a_n = f(n)$, ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ egyszerre konvergens/divergens.

**Feladatok:**

**1. Feladat.** Konvergensek-e a sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ c)hf $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+2)}\right)$ d)hf $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

**2. Feladat.** Konvergensek-e a sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{-5}{4^n}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$ c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{5^n}$ e)hf $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n+1}+(-5)^n}{3^{2n+2}}$ f)hf $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-1}-2^n}{4^{2n-1}}$

**3. Feladat.** Írja fel az alábbi végtelen szakaszos tizedestörteket két egész szám hányadosaként.

a) $0.33333\ldots$ b)hf $0.252525\ldots$ c)hf $20.7252525\ldots$ d) $0.28213213213\ldots$

**4. Feladat.** Mely sorok konvergensek és divergensek? (Használjuk a majoráns- és minoráns-elvet.)

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$ b)hf $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n^3-7}{n^5+2n^4}$ d)hf $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{n^7}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt[7]{n}}$ f)hf $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{1+6^{n-1}}$ g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

**5. Feladat.** Mely sorok konvergensek és divergensek? (Használjuk a gyök- és hányadoskritériumot.)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n-2}}{(n+1)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{n^4}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$ d)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^5 2^{3n+1}}$

e)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} n^7}{3^{2n+1}}$ f)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)3^{n-1}}{5^{n+1}}$ g)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\cdot 4^{n-1}}{(n+5)\cdot n!}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

i)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^{n^2}$

**6. Feladat.** Abszolút konvergensek? Feltételesen konvergensek? Divergensek?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ c)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}$

d)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+1}$ e)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{3n-2}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n$