A2 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

12. hét - Többváltozós függvények szélsőértéke

Elmélet:
Az $z = f(x, y)$ kétváltozós, deriválható függvény kritikus pontjai az olyan (x_0, y_0) pontok, amelyekre

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

teljesül - azaz a pontban a függvény érintősíkja vízszintes. Lokális szélsőértéke egy függvénynek csak ilyen kritikus pontban lehet. (Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.) A lokális szélsőérték létezéséről a függvény Hesse-mátrixának determinánsa segítségével dönthetünk.

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére:

- Ha $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor f-nek lokális minimuma van (x_0, y_0)-ban
- Ha $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van (x_0, y_0)-ban
- Ha $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$, akkor f-nek nincsen lokális szélsőérétke, (x_0, y_0)-ban úgynevezett nyeregpontja van
- Ha $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$, akkor nem tudjuk eldönteni, hogy f-nek van-e szélsőértéke (x_0, y_0)-ban

Ha az f egyes pontokban nem deriválható, akkor ott külön kell vizsgálni, hogy van-e szélsőérték. Illetve, ha egy tartományon vizsgáljuk f-et, akkor a tartomány határán is külön kell vizsgálni.

Feladatok:

1. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények lehetséges szélsőértékhelyeit (kritikus pontjait), döntse el, hogy van-e ott a függvénynek tényleges szélsőértéke:

a) $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$
b)$^{\text{hf}}$ $f(x, y) = -4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$
c) $f(x, y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy$
d)$^{\text{hf}}$ $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$
e) $f(x, y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
f)$^{\text{hf}}$ $f(x, y) = x + \frac{y}{x} + \frac{8}{y}$
g)$^{\text{hf}}$ $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y$

2. Feladat. Egy $V = 4,5\text{dm}^3$ térfogatú téglatest alakú dobozt keresztben egyszer, hosszában pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsineget kelljen felhasználni?

3. Feladat. $^{\text{hf}}$ Felül nyitott téglatest alakú doboz készítünk, melynek térfogata $1m^3$. Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

4. Feladat. A $z = 2x^2 + y^2$ felület és a $z = 5$ sík által határolt térrészbe a lehető legnagyobb térfogatú hasábot írjuk. Mekkora ennek a hasábnak a térfogata?