## 1. Gyak. (ahol lehet, készítsünk ábrát!)

1. Az "A" hajó a $P_0(2,-1)$ pontból indul a $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ irányban egyen-

a, letes sebességgel. A "B" hajó a kikötőből: $O(0,0)$ pontból indul $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ irányban. Írja fel a két hajó útjának egyenletét! Hol metszi egymást a két útvonal? Ez a pont milyen messze van a kikötőtől?

b, Ha egyszerre indulnak és az A hajó óránkénti sebessége 40 km, akkor mekkora sebességgel kell a B hajónak menni, hogy ténylegesen találkozzanak?

② $A(1|3|0)$, $B(-2|2|1)$, $C(-1|-2|-1)$

a) $ABC\ \triangle$ területe $=?$

b) $\underline{a}, \underline{b}\ \triangle$ területe $=?$ , $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok szöge $=?$

c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ paralellepipedon / tetraéder térfogata $=?$

(d)* a $C$-ből az $AB$-re bocsájtott magasságvonal egyenlete $=?$ )

e) $A, B, C$ sík egyenlete $=?$ A $D=(3,-2,5)$ pont rajta van-e ezen a síkon? Ha nincs, akkor mekkora a síktól való távolsága?

③ Az ① repülőgép az $A=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}$ pontból repül $p_1=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$ irányba a $v_1=400$ km/h sebességgel. A ② repülőgép a $B=\begin{bmatrix}5\\-6\\2\end{bmatrix}$ pontból repül $v_2=500$ km/h sebességgel a $p_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$ irányba.

a, Adja meg a helyzetüket 2 óra múlva!

b, Hány km-re vannak egymástól 2 óra múlva?

c, Mekkora a két pálya távolsága?

# 2. Gyak

1)

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \underline{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \underline{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \underline{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \underline{g}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$$

a, $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{b}=?$

b, $\underline{\underline{A}}^T\cdot\underline{c}=?$

c, $\underline{b}^T\cdot\underline{d}=?$ $\quad\underline{c}^T\cdot\underline{d}=?$, $\underline{d}\cdot\underline{b}^T=?$

d, $\underline{b}\cdot\underline{d}^T$, $\underline{g}\cdot\underline{c}^T=?$, $\underline{c}\cdot\underline{g}^T=?$

2)

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}3 & 4 & -2\\ 4 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -3\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix},\quad \underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\\ 7 & -5\end{bmatrix},\quad \underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

Amelyik mátrix-szorzás elvégezhető, azt végezze el!

$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}^T$, $\underline{\underline{A}}^T\cdot\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{B}}^T\cdot\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{C}}\cdot\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{C}}$, $\left(\underline{\underline{A}}^T\cdot\underline{\underline{C}}^T\right)^T\cdot\underline{\underline{B}}^T$, $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\cdot\underline{\underline{C}}$

(3) $\underline{\underline{A}}$ $2\times 2$ és $\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{E}} = 3\underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{B}}$ , $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , $\underline{\underline{A}} = ?$

(4) $\underline{\underline{A}}$ $2\times 2$ tetsz. mátrix

a, melyik az a mátrix, amellyel balról szorozva az 1. és 2. sor felcserélődik

b, balról szorozva az 1. sor $\lambda$-szorosára változik

c, " " a 2. " $\lambda$ " "

(5) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ állítsa elő $\underline{\underline{A}}$-t egy szimm. és egy antiszimm. mátrix összegeként!

# 3. gyak.

(1)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+x_4&=0\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4&=0\\ x_1+2x_2+2x_3+x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 2x_1-2x_2+4x_3&=8\\ -x_1+2x_2+3x_3&=6\\ 4x_1-3x_2-3x_3&=10 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -13 \end{bmatrix}\cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 3\\ 0\\ 3\\ -6 \end{bmatrix}$$

(4)
$$\begin{aligned} 5x-7y+z&=1\\ 10x-14y+2z&=7\\ x-y+z&=3\\ 5x-y-z&=0 \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 10 & 14 \end{bmatrix}\cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 5\\ 16\\ 15\\ 52 \end{bmatrix}$$

(6)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=10\\ x_1-x_2+2x_3-x_4&=1\\ x_1+3x_2+3x_3&=19\\ 3x_1+x_2+4x_3+x_4&=21 \end{aligned}$$

(7)
$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 7\\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \left(\underline{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\right)^T = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1\\ 3\\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = ?$$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$

(10)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + t \cdot x_3 &= -7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a, Milyen $t$-re oldható meg?

b, Oldja meg $t=-1$-re!

(11)
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 5 \\ -x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Vizsgálja $\lambda$ függvényében a megoldást!

(12) Milyen $t \in \mathbb{R}$ esetén metszi egymást az alábbi 4 db sík a térben?

$$\left\{\begin{aligned} y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + y &= 2t \\ 2(x-y) + (z+1) &= 0 \end{aligned}\right.$$

## 4. Gyakorlat

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

1. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

a) $\underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{X}} + 3\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{C}}^2$, $\underline{\underline{X}} = ?$

b) $\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{X}} = 2\underline{\underline{A}} + 3\underline{\underline{B}}^T$, $\underline{\underline{X}} = ?$

c) $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{Y}} \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{D}} = 3\underline{\underline{D}}^T + \underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{Y}} = ?$

2. Hogyan kell x-értéket megválasztani, hogy $\det \underline{\underline{A}} = 0$ teljesüljön?

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ x & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x & 0 & (x^2-2) \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & (x-1) \end{bmatrix}$, ③ milyen "a"-ra nincs inverz?

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$a = 6$ esetén adja meg az inverz mátrixot!

④ $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left(\underline{a} \cdot \underline{b}^T + \underline{\underline{C}}^T\right) \underline{\underline{X}} = \underline{a}^T \cdot \underline{b} \cdot 2 \underline{\underline{C}}^T , \quad \underline{\underline{X}} = ?$$

⑤ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^4 \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\underline{\underline{X}} = ?$

⑥ Mutassa meg, hogy

a) $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^T = (\underline{\underline{B}}^T) \cdot (\underline{\underline{A}})^T$

b) $\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = (\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{B}})$

ha (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

## 5. Gyakorlat

(1) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a, Adja meg az $\underline{\underline{A}}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

b, Mutassa meg, h. a sajátvektorok lin. függetlenek és rajzolja fel őket!

c, Legyen $\underline{\underline{S}}^\circ := [\underline{s}_1^\circ, \underline{s}_2^\circ, \underline{s}_3^\circ]$ (a sajátvektor-bázisra vonatkozó áttérési mátrix) Írja fel az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot ebben az $s_1^\circ, s_2^\circ, s_3^\circ$ bázisban! $\left(\underline{s}_i^\circ = \frac{\underline{s}_i}{|\underline{s}_i|}\right)$

$\left( \underline{\underline{A}}_{új} = \underline{\underline{S}}^{\circ -1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{S}}^\circ \right)$

d, Mutassa meg, hogy

$(\text{Spur } \underline{\underline{A}} :=) a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ és

$\det \underline{\underline{A}} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

e, rang $\underline{\underline{A}}$ = ? ($\exists$-e $\underline{\underline{A}}^{-1}$, és ha igen adja meg!)

---

(2) Legyen egy tenzor 3 sajátértéke: 1, 2, 3 és a hozzá tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Adja meg a tenzor mátrixát az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban! $\left( \underline{\underline{A}}_{xyz} = \underline{\underline{S}}^\circ \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{S}}^{\circ -1} \right)$

---

(3) Adja meg a köv. mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait (fővektorait) és írja fel a Jordan-féle normálalakot!

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

---

(4) Adja meg az $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}^{20}$, $\underline{\underline{B}} := \underline{\underline{A}}^{-1}$

# 6. Gyak.

① Hozza kanonikus alakra az alábbi kvadratikus polinomot.

$$p(x,y) = x^2 + 6xy + y^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{4}{\sqrt{2}}y + 1$$

② Hozza kanonikus alakra az alábbi egyenlettel adott másodrendű görbét!

a) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x + \frac{20}{\sqrt{2}}y + \frac{8}{3} = 0$

b) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ Mi a görbe?

③ Határozza meg az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

Adja meg a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátalteret!
Írja fel az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot az $\underline{s}_1^\circ, \underline{s}_2^\circ, \underline{s}_3^\circ$ bázisban!

# 7. Gyak

① a, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b, $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{, ha } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{, különben} \end{cases}$

Folytonos-e az $f$ fv. az origóban?

---

② $f(x,y,z)=2z^2\cdot x-3y^2\cdot z+2xy$ , $\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ , $\underline{x}_0=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

a, $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}=?$ , $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)=?$ b, $f_x=?$ , $f_y=?$ , $f_z=?$ , $(\text{grad} f)(\underline{x}_0)=?$

c, $\Delta f=?$ (Laplace $f$)

d, $(df)(\underline{x}_0;\underline{x})=?$

e, $\underline{\tilde{x}}:=\begin{bmatrix}1{,}99\\0{,}98\\-0{,}99\end{bmatrix}$ $\Delta f\ (=f(\tilde{x})-f(x_0))=?$ ($f$ pontos megváltozása)

$(df)(\underline{x}_0,\underline{\tilde{x}})=?$

$(\Delta f-df)=?$

f, $f(\underline{\tilde{x}})$-t közelítse a totális derivált (v. érintő (hipersík)) segítségével!

$\left(df(\underline{x}_0,x):=(\text{grad} f)(\underline{x}_0)\cdot\overbrace{(\underline{x}-\underline{x}_0)}^{\Delta\underline{x}}\right)$

③ $f(x,y,z) = z\sqrt{y^2 + \frac{x}{2}}$ , $\underline{x}_0^T = (10,2,4)$ , $\underline{\tilde{x}}^T = (10;\ 1{,}99;\ 4{,}02)$

a, Írja fel az $f$ fv. $\underline{x}_0$-beli érintősíkjának egyenletét!

b, Közelítőleg hány %-kal változik a fv. értéke, ha $\underline{x}_0$-ban az első változó értékét 2%-kal, a 2. változót 4%-kal növeljük, a 3. változót pedig 3%-kal csökkentjük?

---

④ $f(x,y) = x^3 \cdot \sqrt{y} + 2y^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ , $\underline{x}_0 = (1,1)$

a, $\Delta x = -0{,}001$, $\Delta y = 0{,}01$ mennyit változik a fv. értéke közelítőleg?

b, Valamelyik változót 10%-kal növelhetjük. Melyik legyen az, ha a fv. érték nagyobb változása a cél?

8. Gyak.

① $f(x,y)=x^4-2x^2+(2x^2-1)y^2=$ Extr!

② $f(x,y)=(x-2)^4+(y-2)^4+2(x-2)(y-2)+6=$ Extr!

③ $f(x,y)=\frac{4}{3}x^3-4x^2+\frac{4}{3}y^3-2y^2$

a) adja meg a fv. lok. sz. é. helyeit és nyeregpontjait!

b) rajzolja fel azokat a tartományokat, ahol $f$ konvex, ill. konkáv!

④ $f(x,y,z)=(x+2y)^2+z^2+6zy=$ Extr!

⑤ $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-2z-6x=$ Extr!

⑥ Írja fel az $f$ fv. $\underline{x}_0$-beli másodfokú Taylor polinomját!

a) $f(x,y)=x^2+3y^2x+\frac{6}{xy}$ , $\underline{x}_0=(1,1)$

b) $f(x,y,z)=2z^2+(x+2y+z)^3$ , $\underline{x}_0=(1,0,1)$

⑦ $e^{x^4+y^4+4xy}=$ Extr!

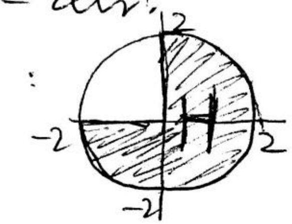
# 9. gyak

① $x^2+4x+y^2-6y+10 = \text{Extr!}$

$x^2+y^2 \leq 52 \quad , \; x \leq 0$

② $x^2-2x+y^2 = \text{Extr!}$

$(x,y) \in H$ :




③ Egy téglatest egy csúcsból induló lapátlóinak összege $15\sqrt{2}$. Mekkora lehet max. a téglatest térfogata?

④ $f(x,y) = x^2+y^2-xy-4y-x-10 = \text{Min!}$

$\frac{x}{2}+y-3 \leq 0 \;, \quad x \geq 0 \;, \; y \geq 0$ (készítsen ábrát!)

⑤ $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = \text{Extr!}$

$x_1+x_2=6$

$x_2-x_3=3$

⑥ $f(x,y) = 2x+3y = \text{Extr!}$

$x+y \leq 4, \quad x \leq 2, \quad y \geq 0 \;, \; y \leq 4+2x$ (készítsen ábrát!)

# 10. gyak.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx} = ?$ ha $0 \le x \le 1$, mi a fv. sorozat határfv.-e?

Egyenletesen konvergál-e a fv. sorozat a határfv.-hez?

(2) Határozza meg az alábbi fv. sorok konvergencia tartományát és összegfv.-ét! Hol egyenletes a konvergencia?

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k(1-x)$

(3) Állapítsa meg az alábbi hatványsorok konv. tartományát!

a, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^k$ b, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!(x-5)^k$, d, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$, e, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k \cdot 4^k}$

(4.) Fejtse az $x_0 = 0$ körüli hatványsorba az alábbi fv.-eket!

a, $f(x) = \cos\sqrt{x}$

b, $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

c, $f(x) = e^{-x^2}$

d, $f(x) = \mathrm{sh}^2 x$

e, $f(x) = (1+x)^{-3}$

g, $f(x) = \frac{3x-1}{4+6x^2}$

h, $f(x) = \mathrm{arctg}\, 2x$

i, $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{16-x^2}}$

11. (gyak.)

1. Írja fel a $g(x)=|x|-\pi$, $x\in(-\pi,\pi)$, $g(x+2k\pi)=g(x)$

a) fv. Fourier sorát!

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = ?$$

2. $$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 2, & 0 \le x < \pi \end{cases}, \quad f(x+k\cdot 2\pi)=f(x)$$

Írja fel a fv. Fourier-sorát! Mekkora a F. sor összegfv.-ének értéke a $(k\cdot\pi)$ pontokban?

3. $$f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{ha } x\in(-\pi,0) \\ x, & \text{ha } x\in[0,\pi) \end{cases} \qquad f(x+k\cdot\pi)=f(x)$$

a) fejtse F. sorba a fv.-t!

b) Rajzolja fel az összegfv.-t a $[-3\pi,3\pi)$-n!

④ Legyen $f(x)=\pi-x$, ha $x\in(0,\pi]$. Először terjessze ki páratlanul

a) a $(-\pi,\pi]$-re, majd folytassa $2\pi$-periodikusan! Rajzolja le ezt az $\tilde{f}$ fv.-t!

b) Írja fel a Fourier sorát!

c) Rajzolja fel a F. sor összegfv.-ét!

Hol nem egyezik meg az összegfv. értéke az $\tilde{f}$ fv. értékeivel?

---

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$, $f\in[-\ell,\ell)$-ben van folyt. és $2\ell$ periodikus

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,, \quad n=0,1,\ldots \qquad b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,, \quad n=1,2,\ldots$$

12. Gyak.

① Rajzolja fel az alábbi tartományokat és adja meg a geometriai középpontot!

$\boxed{a)}$ $0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}$ , $0 \le x \le 2$ $\left(G\left(\frac{2}{3} \middle| \frac{1}{3}\right)\right)$

b) $\left(x^2 \le y \le 2 - x \;,\; -\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}\right)$ $y = x^2$ és $y = 2 - x$ görbék által határolt tart. $G(-0{,}5|1{,}6)$

c) $-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1 - y$ , $0 \le y \le 1$ $\left(G(-0{,}13|0{,}778)\right)$

② $\iint\limits_B (x^2+y^2)\, d(x,y) = ?$ $B: \; y^2 \le x \le \sqrt{y}, \; 0 \le y \le 1$ $(0{,}4)$

③ $\iint\limits_B (4-y^2)\, d(x,y) = ?$ $B: \; y = 2 - x^2, \; y = x^2 - 2$ $(23{,}24)$

4. Cserélje fel az integrálási határokat és számolja ki az integrált!

a) $$\int_{-2}^{1}\left[\int_{x^2+2x}^{4-x^2}(2x+y)\,dy\right]dx$$

b) $$\int_{0}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}(x\cdot y)\,dx\right]dy$$

5.

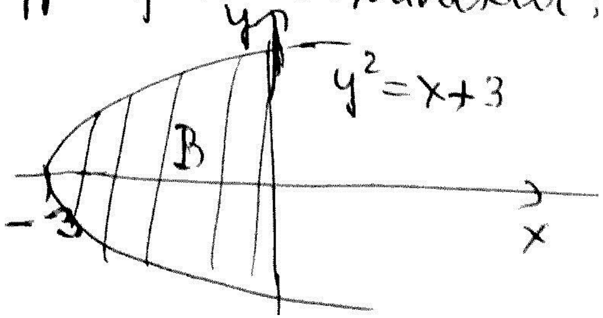
a) $$\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{1} y e^{-x^2}\,dx\,dy=?$$

b) $$\int_{0}^{1}\int_{y^{\frac{2}{3}}}^{1} y\cdot\cos x^2\,dx\,dy=?$$

c) $$\int_{0}^{1}\int_{x}^{1}\frac{x\sin y}{y}\,dy\,dx=?$$

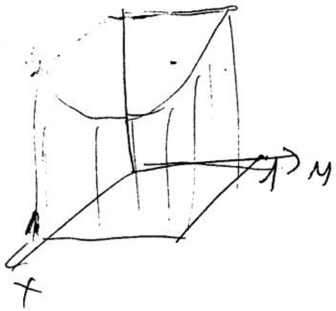
d) $$\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1}\sqrt{1+x^3}\,dx\,dy=?$$

6. Adja meg a $\mu(x,y)=y^2-2x$ sűrűségű lemez tömegét és súlypontjának koordinátáit!



## 13. Gyak.

### térfogati integrálok, int. transzformáció $(dV \equiv d(x,y,z))$

1) 

$$\iiint_M (1+x-z)\,dV = ?$$

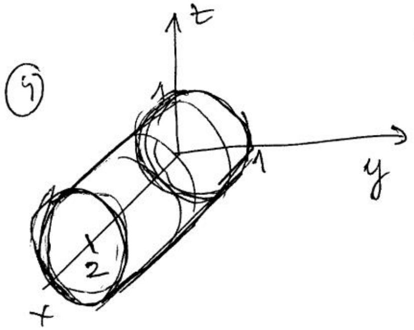
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x^2+y^2+2\}$$

(0,44)

2) $$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dz\,dy\,dx = ?$$

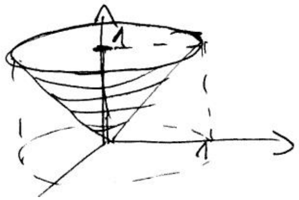
(0,034) (Mi a tartomány? (tetraéder))

3) $$\iiint_V x^2 y z\,dV = ? \qquad V:\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \quad \left(\frac{1}{105}\right)$$

4) 

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 2,\ y^2+z^2 \le 1\}$$

$$\iiint_M \left(\sqrt{y^2+z^2}+x\right)dV = ? \quad \left(\frac{20}{3}\pi\right)$$

5) 

$$\iiint_M \left(\sin\sqrt{x^2+y^2}+2z\right)dV = ? \quad (2{,}183\pi)$$