Bsc/A1/Gé/1.HF/2010 őszi félév (V. Nagy)
Leadási határidő: az 1. ZH előtti gyakorlaton a gyak. vezér részére
(olvashatóan, kézzel írva!)

1. Számsorozatok

1. $\lim \dfrac{n^3-1}{(n^2-1)(n+1)}$
2. $\lim \dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$
3. $\lim \left(\dfrac{5+n}{n}\right)^4$
4. $\lim e^{\frac{2}{n^2}}$
5. $\lim \sqrt{n+2}\left(\sqrt{\dfrac{n}{3}+1}-\sqrt{\dfrac{n}{3}-1}\right)$
6. $\lim \dfrac{n\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n^2+2}}{2n^{4/3}+5n}$
7. $\lim \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}}$
8. $\lim \dfrac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$
9. $\lim \dfrac{(-2)^{3n+1}+2\cdot 2^{2n}\sqrt[3]{8n}}{16^{\frac{n}{2}}\cdot 9^{\frac{n}{2}+1}-(-5)^{n+2}}$
10. $\lim \left(2^n 3^{1-n}+2^n 3^{-n}\right)$
11. $\lim \dfrac{\sqrt[n]{n^{2n}}}{\sqrt[n]{10}\cdot(n+1)^2}$
12. $\lim \left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^{2n+1}$
13. $\lim \left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^{6n+1}$
14. $\lim \left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{9n-3}$
15. $\lim 3^{\frac{n+2}{n-1}}$
16. $\lim \left(2+\dfrac{4}{n+1}\right)^{2n}\cdot 4^{-n}$
17. $\lim \dfrac{\cos^2 n}{n^3+1}$
18. $\lim \ln\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)$

2. Végtelen sorok

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{(k-1)k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{(2k-1)(2k+1)}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2n+1}-2\cdot 9^{\frac{n}{2}}}{2^{2n+1}+\left(\sqrt{16}\right)^{n+1}}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}5^{2-n}\cdot\frac{2^{2n+1}+16^{\frac{n}{2}+1}}{2^{n+1}}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^{n-1}$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}8^{\frac{n}{3}+1}\cdot(-4)^{2-2n}$

2.1. Konvergens-e az alábbi sor? (Válaszát indokolja!)

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^{2n+1}\cdot 3^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{\binom{n}{2}}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot 4^{2-n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+\sqrt{n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{27^{\frac{n}{3}} \cdot n}$

3. Da egyenletek

1. $y_n =?, y_1, y_2, y_3 =?, \lim y_n =?$

   (a) $y_{n+1} = \frac{1}{5} y_n + 1, y_0 = 2$

   (b) $y_{n+1} - 2y_n + 2 = 0, y_0 = 5$

   (c) $3y_{n+1} + 2y_n = -\frac{5}{3}, y_0 = -2$

2. Egy hallgató $\forall$ év elején betesz a bankba 5000 Ft-ot. 10 évig nem nyúl hozzá. 10 év elteltével $\forall$ év elején kivesz 5000 Ft-ot. A kamat legyen mindig 10%. Mennyi pénze lesz 20 év múlva?

3. $y_n =?, y_2, y_3, y_4 =?, \lim y_n =?$

   (a) $y_{n+2} = \frac{3}{4} y_{n+1} - \frac{1}{8} y_n + 3, y_0 = 1, y_1 = 2$

   (b) $y_{n+2} + 8y_{n+1} + 16y_n = 50, y_0 = 4, y_1 = 10$

   (c) $9y_{n+2} - y_n = 72, y_0 = 1, y_1 = 5$

4. Komplex számok

1. (a) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} =?$

   (b) $(1-i)^4 + \frac{(2+i)^2}{3-4i} =?$

   (c) $\sqrt[3]{-i} =?$

   (d) $(-1)^{\frac{3}{4}} =?$

   (e) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} =?$

   (f) $\sqrt[6]{2^3} =?$

   (g) $\left(\sqrt[6]{2}\right)^3 =?$

   (h) $(1+i)^{10} =?$

2. oldja meg:

   (a) $5z^3 + 40 = 0$

   (b) $z^2 - (2+3i)z = 1 - 3i$

5. Fv. határérték, asszimptota, szakadási helyek, folyt.

1. (a) $\lim_{1} \frac{x^4-1}{x-1} =?$

   (b) $\lim_{-3_+} \frac{|x+3|}{x+3} =?$

   (c) $\lim_{-3_-} \frac{|x+3|}{x+3} =?$

   (d) $\lim_{3_+} 2^{\frac{1}{3-x}} =?$

   (e) $\lim_{0} x \cdot \frac{\operatorname{ctg} 3x}{2} =?$

   (f) $\lim_{0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} =?$

   (g) $\lim_{0_+} \operatorname{sgn}\left(x^2 - 4x\right) =?$

   (h) $\lim_{4_-} \operatorname{sgn}\left(x^2 - 4x\right) =?$

   (i) $\lim_{-\infty} \frac{x^2+2x^3}{x^3-1} =?$

   (j) $\lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}} =?$

2. Határozza meg az alábbi fv-ek szakadási helyei jellegét és asszimptotáit!

   (a) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x}$

   (b) $f(x) = \frac{x(x+2)}{x-1}$

   (c) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x^2-4\right)$

   (d) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+x}$

3. Tegye folytonossá az alábbi fv-eket a paraméterek begfelelő megválasztásával! (Készítsen ábrát!)

(a) $f(x) = \begin{cases} 3e^{2x} & ,x \le 0 \\ a - x^3 & ,x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} |x-2| & ,x \ge 2 \\ b + \frac{1}{2}x & ,x < 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} b - x^2 & ,x \le 0 \\ 2 + \ln(x+1) & ,x > 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & ,x \le 0 \\ b \cdot \frac{\sin 2x}{x} & ,x > 0 \end{cases}$

4. Zérushely meghatározása

$$f(x) = x^4 - x^2 - 9$$

(a) Mutassa meg, hogy f-nek van $(1,2)$-ben valós gyöke!

(b) Az intervallum felezéssel közelítse a gyököt 0.07 pontossággal!

(c) Közelítse ezt a gyököt húr módszerrel! Adja meg a közelítő sorozat $1., 2., 3., 4.$ és $n.$ tagját!

6. Deriválás

1. Deriválja az alábbi fv-eket!

(a) $3x^8 - 4x^5 + 2\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$

(b) $\left(4 + 3\sqrt{x}\right)^8 + x^2 \cdot e^{3x}$

(c) $\dfrac{2x^3 - \sqrt{x}}{x^4 + 2x}$

(d) $\dfrac{x \ln\left(x^2+1\right)}{\sin^2 2x}$

(e) $\sqrt[3]{x^2 + x}$

(f) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$

(g) $\dfrac{e^{x^2} + 2^{x+1}}{\ln^2(3x-1)}$

(h) $e^{\sin^2 x}$

(i) $(2x+1)^{x^2}$

(j) $(\sin 3x)^x$

(k) x^{2^x}

(l) $\sin^2\left(\cos(3x+1)\right)$

(m) $\ln\left(\cos^2(\sin 2x)\right)$

(n) $\sqrt{e^{\sin x^2}}$

(o) $\tan\left(\ln^2 \dfrac{x+1}{x-1}\right)$

2. Írja fel az x_0 beli érintőegyenes és a másodfajú Taylor pol. egyenletét! Majd ennek segítségével adjon közelítést $f(\bar{x})$-re!

(a) $f(x) = x\, e^{-x^2}, x_0 = 0, \bar{x} = -0.01$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - x}}{x+1}, x_0 = 3, \bar{x} = 3.02$

3. Legyen $K(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3 + 2 + \frac{2}{x+1}, x_0 = 3$

(a) Hány %-kal változik a fv értéke közelítőleg, ha x_0 értéke

i. 2%-kal nő?

ii. 3%-kal csökken?

(b) Hány %-kal kell közelítőleg x_0 értékét változtatni, ha 10%-kal szeretnénk a fv értékét növelni?

4. Végezzen teljes fv vizsgálatot!

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

(b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$

(c) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2$

(d) $f(x) = x\, e^x$

(e) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

5. L'Hospital szabály:

(a) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{x-\pi}$

(b) $\lim_{0_+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

(c) $\lim_{+\infty} \left(x^2 - x\right) e^{-2x}$