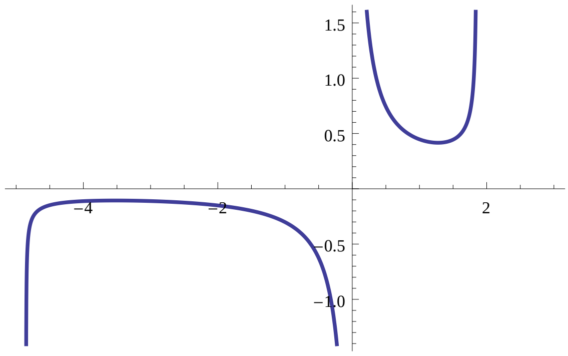
Segédlet a 2. ZH-hoz
gépész A1

Egy konkrét páldán keresztül gyakoroljuk az improprius integrált (Cauchy főértéket), határozott integrált és határozatlan integrált (helyettesítéses és parciális törtekre bontás), valamint egy kis L'Hospital-ást.

Feladat

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}} \,\mathrm{d}\, x = ?$$

1. Improprius vagy rendes az integrál?



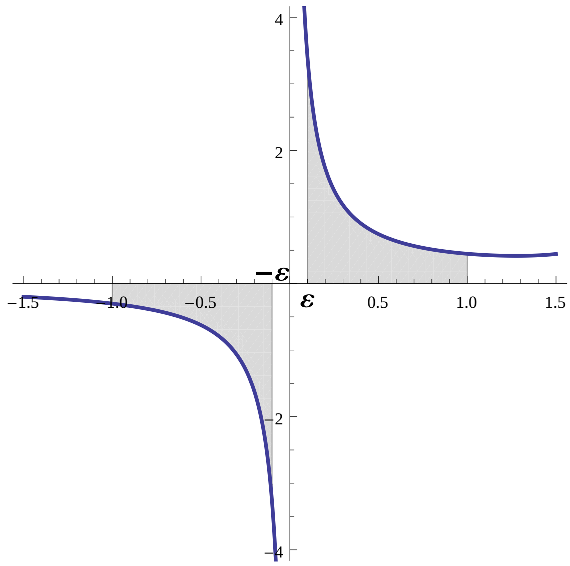
A határok végesek ezért csak azzal lehet a baj, hogy az integrálandó fv végtelenbe tart valahol a $[-1, 1]$ intervallumban. Ellenőrizzük le, hogy így van-e!

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}} = \pm\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$x\sqrt{9-3x-x^2} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 0 \text{ vagy } x = \underbrace{\frac{3+\sqrt{9-4\cdot(-1)\cdot 9}}{-2}}_{\approx -4.854} \text{ vagy } x = \underbrace{\frac{3-\sqrt{9-4\cdot(-1)\cdot 9}}{-2}}_{\approx 1.854}$$

Az integrálási határok között (a $[-1, 1]$ intervallumban) az $x = 0$-val van baj, ezért az integrálás improprius.

2. Használjunk Cauchy főértéket

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\, x = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}\, x + \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\, x \right)$$



3. Most két (rendes) határozott integrált kell kiszámolnunk.

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = ?$$
$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = ?$$

   Kezdjük a másodikkal, a másikat ugyanúgy kell, csak más számokat kell a végén beírni. A határozott integrálhoz először határozzuk meg a primitív fv-t.

4. $\int \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = ?$

   (a) Megjelenik egy másodfokú polinom gyöke ($\sqrt{9-3x-x^2}$), először ezzel kell kezdeni valamit. Ahogy arra már az utolsó gyakon utaltam $\sqrt{2.\text{ fokú polinom}}$ alakú kifejezésnél 3 esetet különböztetünk meg, attól függően, hogy a polinomnak 0 vagy 2 darab gyöke van, illetve, hogy milyen a főegyüttható előjele:

   - $\sqrt{1-x^2}$: 2 gyök, negatív főegyüttható $\Rightarrow$ $x = \sin y$ helyettesítés
   - $\sqrt{1+x^2}$: 0 gyök, pozitív főegyüttható $\Rightarrow$ $x = \sinh y$ helyettesítés
     (negatív nem is lehetne, mert ha egy 2. fokú polinomnak 0 darab gyöke van és negatív a főegyütthatója, akkor mindenhol negatív értéket vesz fel, így értelmetlen belőle gyököt vonni)
   - $\sqrt{x^2-1}$: 2 gyök, pozitív főegyüttható $\Rightarrow$ $x = \cosh y$ helyettesítés
   - ○ Ha 1 gyök van, akkor a polinom $(x-a)^2$ alakú és ekkor $\sqrt{(x-a)^2} = |x-a|$. Ennek az integrálása más tészta.

   Általában olyan kifejezéseknél, ahol $\sqrt{2.\text{ fokú polinom}}$ valahogy megjelenik, célszerű ezen helyettesítések valamelyikét alkalmazni, ami $\frac{\text{trigonometrikus polinom}}{\text{trigonometrikus polinom}}$ kifejezésre vezet.

   Kivétel például az $\int \frac{1}{\sqrt{2.\text{fokú}}}$, mert ott egyből alapintegrálra vezethető, vagy az $\int \frac{x}{\sqrt{2.\text{fokú}}}$, mert az $\int \frac{f'}{f}$ alakú. Természetesen az ilyen egyszerű eseteknél is kijön úgy, hogy az ember végigcsinálja a helyettesítést, de hosszadalmasabb.

   A mi esetünkben a másodfokú polinom gyöke nemtriviálisan kerül elő, mert van egy x szorzó is a nevezőben. Alkalmazzuk a felsorolt helyettesítések valamelyikét. Melyik esetbe tartozik a példánk? A $9-3x-x^2$-nek a főeggyüthatója negatív és már láttuk, hogy két gyöke van, ezért $1-x^2$ alakra kell hoznunk.

$$9-3x-x^2 = 9-(x^2+3x) = 9-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 =$$
$$\frac{45}{4}\left(1-\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{45}{4}}\right) = \frac{45}{4}\left(1-\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{45}{4}}}\right)^2\right) =$$
$$\frac{45}{4}\left(1-\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right)$$

Tehát

$$\int \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{x\sqrt{\frac{45}{4}\left(1-\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right)}}\,\mathrm{d}\,x =$$
$$\int \frac{1}{x\,\frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{3\sqrt{5}}\int \frac{1}{x\sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}\,\mathrm{d}\,x \qquad (1)$$

(b) Alkalmazzunk $y=\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}}$ helyettesítét (lineáris helyettesítés, viszont nem olyan egyszerű, mint az eddig megszokottak, mert x és $ax+b$ egyszerre szerepel a kifejezésben!).

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}} && \text{kifejezem } x\text{-et} \\ x &= \frac{3\sqrt{5}}{2}\,y-\frac{3}{2} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\ \text{(deriválok } y \text{ szerint)} \\ \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} &= \frac{3\sqrt{5}}{2} && \text{átszorzok } \mathrm{d}\,y\text{-al !} \\ \mathrm{d}\,x &= \frac{3\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}\,y \end{aligned}$$

Írjuk be az újonnan bevezetett y-t, az ezzel kifejezett x-et, valamint a levezetett $\mathrm{d}\,x$-et (1)-be.

$$\frac{2}{3\sqrt{5}}\int \frac{1}{x\sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}\,\mathrm{d}\,x =$$
$$\frac{2}{3\sqrt{5}}\int \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\,y-\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}\,y =$$
$$\int \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\,y-\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}\,y \qquad (2)$$

(c) Most már megjelent az $\sqrt{1-y^2}$, ezért használhatunk $\sin$ helyettesítést ($z = \arcsin y$):

$$\begin{aligned} \sin z =& y && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} \\ \cos z =& \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,z} && \text{átszorzok } \mathrm{d}\,z\text{-vel} \\ \cos z \,\mathrm{d}\,z =& \mathrm{d}\,y \end{aligned}$$

Írjuk be a kapott formulákat (2)-be!

$$\begin{gathered} \int \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\,y - \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}\,y = \\ \int \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\,\sin z - \frac{3}{2}\right)\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 z}}_{\sqrt{\cos^2 z}}}\cos z\,\mathrm{d}\,z = \\ \int \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\,\sin z - \frac{3}{2}\right)\cos z}\cos z\,\mathrm{d}\,z = \\ \int \frac{1}{\frac{3\sqrt{5}}{2}\,\sin z - \frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,z \end{gathered} \tag{3}$$

(d) Vegyük észre, hogy ez trigonometrikus fv-ek polinomja (illetve azok hányadosa), melyre automatikusan $\tan\frac{x}{2}$ helyettesítést alkalmazok (most a z játsza az x szerepét).

$$\begin{aligned} w =& \tan\frac{z}{2} \\ \sin z =& \frac{2w}{1+w^2} \\ \cos z =& \frac{1-w^2}{1+w^2} \\ \tan z =& \frac{2w}{1-w^2} \\ \mathrm{d}\,z =& \frac{2}{1+w^2}\,\mathrm{d}\,w \end{aligned}$$

Beírva (3)-ba:

$$\begin{gathered} \int \frac{1}{\frac{3\sqrt{5}}{2}\,\sin z - \frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,z = \int \frac{1}{\frac{3\sqrt{5}}{2}\,\frac{2w}{1+w^2} - \frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{1+w^2}\,\mathrm{d}\,w = \\ \int \frac{2}{\frac{3\sqrt{5}}{2}\,2w - \frac{3}{2}\left(1+w^2\right)}\,\mathrm{d}\,w = \int \frac{2}{3\sqrt{5}\,w - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}w^2}\,\mathrm{d}\,w = \\ \int \frac{-2}{\frac{3}{2}w^2 - 3\sqrt{5}\,w + \frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,w \end{gathered} \tag{4}$$

(e) Ez $\frac{\text{constans}}{\text{2. fokú polinom}}$ alakú. Az ilyenek integrálásánál a következő esetek vannak:

- ha a nevezőben lévő polinomnak 0 db gyöke van $\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$-re vezethető
- ha a nevezőben lévő polinomnak 1 db gyöke van $\Rightarrow \int \frac{1}{x^2}$-re vezethető

- ha a nevezőben lévő polinomnak 2 db gyöke van ⇒ parciális törtekre bontás

Számoljuk ki a $\frac{3}{2}w^2 - 3\sqrt{5}\,w + \frac{3}{2}$ gyökeit! Azt kapjuk, hogy $\pm 2 + \sqrt{5}$ a 2 db gyök, tehát parciális törtekre bontás fog következni:

$$\frac{3}{2}w^2 - 3\sqrt{5}\,w + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(w - 2 - \sqrt{5}\right)\left(w + 2 - \sqrt{5}\right)$$

Írjuk vissza (4)-be:

$$\begin{aligned} &\int \frac{-2}{\frac{3}{2}\left(w-2-\sqrt{5}\right)\left(w+2-\sqrt{5}\right)}\,\mathrm{d}\,w = \\ &\frac{-4}{3}\int \frac{1}{\left(w-2-\sqrt{5}\right)\left(w+2-\sqrt{5}\right)}\,\mathrm{d}\,w \end{aligned} \tag{5}$$

Kicsit egyszersödött, most jöhet parciális törtekre bontás.

$$\frac{1}{\left(w-2-\sqrt{5}\right)\left(w+2-\sqrt{5}\right)} = \frac{A}{w-2-\sqrt{5}} + \frac{B}{w+2-\sqrt{5}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 1 &= A\left(w+2-\sqrt{5}\right) + B\left(w-2-\sqrt{5}\right) = \\ &= Aw + A\left(2-\sqrt{5}\right) + Bw - B\left(2+\sqrt{5}\right) = \\ &= (A+B)w + A\left(2-\sqrt{5}\right) - B\left(2+\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$A + B = 0 \text{ és } A\left(2-\sqrt{5}\right) - B\left(2+\sqrt{5}\right) = 1$$

$$\Downarrow \text{ (megoldást nem részletezem)}$$

$$A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\left(w-2-\sqrt{5}\right)\left(w+2-\sqrt{5}\right)} = \frac{1/4}{w-2-\sqrt{5}} - \frac{1/4}{w+2-\sqrt{5}}$$

(f) Irjuk vissza (5)-be és vegyük észre, hogy $\frac{1}{\text{lineáris polinom}}$ integrálja $\ln$-es lesz.

$$\begin{aligned} &\frac{-4}{3}\int \frac{1}{\left(w-2-\sqrt{5}\right)\left(w+2-\sqrt{5}\right)}\,\mathrm{d}\,w = \\ &\frac{-4}{3}\int \frac{1/4}{w-2-\sqrt{5}} - \frac{1/4}{w+2-\sqrt{5}}\,\mathrm{d}\,w = \\ &\boxed{\frac{-4}{3\cdot 4}\ln\left|w-2-\sqrt{5}\right| + \frac{4}{3\cdot 4}\ln\left|w+2-\sqrt{5}\right| + c} \end{aligned}$$

Eddig nem jött elő, de most fény derül rá: $\int \frac{1}{x} \neq \ln x + c$, helyesen:

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + c$$

A határozott integrálásnál kelleni fog az $\frac{1}{x}$ fv negatív fele is és negatív szám logaritmusa nem értelmes, ezért kell az abszolút érték.

(g) Az intgrálás készen van, már csak vissza kell helyettesíteni w-t x-re.

$$w = \tan\frac{z}{2} \overset{z=\arcsin y}{=} \tan\frac{\arcsin y}{2}$$

A $\tan\arcsin$ kifejezéstől még most szabaduljunk meg, mert elég kínos lenne $\ln\left(\tan\frac{\arcsin\varepsilon}{2}\right)$ típusú határértékeket számolni. Használjuk a következő szögazonosságot (amely minden $z \in \mathbb{R}$ számra igaz):

$$\tan\frac{z}{2} = \frac{\sin z}{1+\cos z}$$

$$\text{használjuk azt, hogy } \cos^2 = 1-\sin^2 \Rightarrow \cos = \sqrt{1-\sin^2}$$

$$\tan\frac{z}{2} = \frac{\sin z}{1+\sqrt{1-\sin^2 z}}$$

$$\tan\frac{\arcsin y}{2} = \frac{\sin(\arcsin y)}{1+\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} =$$

$$\tan\frac{\arcsin y}{2} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$$

Máris megkönnyebbültünk. Most $y = \frac{2}{3\sqrt{5}}\,x + \frac{1}{\sqrt{5}}$-et kell beírni. Számoljuk ki előre $1-y^2$-et:

$$1-y^2 = 1-\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1-\left(\frac{4}{9\cdot 5}\,x^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{5}\right) =$$

$$\frac{4}{45}\left(9-3x-x^2\right)$$

Alakul.

$$w = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} = \frac{\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\sqrt{\frac{4}{45}\left(9-3x-x^2\right)}} =$$

$$\text{kiviszem a } \frac{4}{45}\text{-ödöt a gyök alól és bővítek } 3\sqrt{5}\text{-el} \ldots$$

$$\frac{2x+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3x-x^2}}$$

Az eredeti w-s kifejezésbe visszaírva kapjuk, hogy $\int \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}} =$

$$\boxed{\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{2x+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3x-x^2}}-2-\sqrt{5}\right| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2x+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3x-x^2}}+2-\sqrt{5}\right| + c}$$

Nevezzük el az eredményt ($c = 0$ választással) $F(x)$-nek.

5. Most kiszámolhatjuk a határozott integrált.

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \tag{6}$$
$$[F(x)]_{-1}^{-\varepsilon} + [F(x)]_{-\varepsilon}^{-1} =$$
$$(F(-\varepsilon) - F(-1)) + (F(1) - F(\varepsilon)) = \qquad \text{nyolc tagból fog állni}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{-2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3\varepsilon-\varepsilon^2}} - 2 - \sqrt{5}\right| + \\
&\frac{1}{3}\ln\left|\frac{-2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3\varepsilon-\varepsilon^2}} + 2 - \sqrt{5}\right| - \qquad (7)\\
&\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{-2+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3-1}} - 2 - \sqrt{5}\right| - \\
&\frac{1}{3}\ln\left|\frac{-2+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3-1}} + 2 - \sqrt{5}\right| + \\
&\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{2+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3-1}} - 2 - \sqrt{5}\right| + \\
&\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3-1}} + 2 - \sqrt{5}\right| - \\
&\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3\varepsilon-\varepsilon^2}} - 2 - \sqrt{5}\right| - \\
&\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3\varepsilon-\varepsilon^2}} + 2 - \sqrt{5}\right| \qquad (8)
\end{aligned}$$

Egyelőre ne alakítsuk tovább.

6. Most kell $\varepsilon \to 0$ határértéket venni. Próbáljunk meg egyszerűen behelyettesíteni 0-t.

$$\left.\frac{\mp 2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9\pm 3\varepsilon-\varepsilon^2}}\right|_{\varepsilon=0} =$$
$$\frac{3}{3\sqrt{5}+2\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} =$$
$$\frac{\sqrt{5}-2}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)} = \sqrt{5}-2$$

Ebből láthatjuk, hogy ahol $+2-\sqrt{5}$ szerepel a tört után a logaritmus hasában ((7) és (8) jelöli a megfelelő sort), ott $\ln 0$ jelenik meg. Emiatt nem ússzuk meg a határérték számítást. Az $\ln(\text{pozitív szám})$ tagokkal most ne foglalkozzunk (ott tényleg csak be kell helyettesíteni 0-t), csak a két $\ln 0$-s taggal.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\ln\left|\frac{-2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3\varepsilon-\varepsilon^2}}+2-\sqrt{5}\right|-\\
&\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3\varepsilon-\varepsilon^2}}+2-\sqrt{5}\right|=\\
&\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\frac{-2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3\varepsilon-\varepsilon^2}}+2-\sqrt{5}}{\frac{2\varepsilon+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3\varepsilon-\varepsilon^2}}+2-\sqrt{5}}\right|=\\
&\frac{1}{3}\ln\left|\frac{-2\varepsilon+3+\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}{2\varepsilon+3+\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}\right|
\end{aligned}\tag{9}$$

Számoljuk ki csak az abszulút értéken belüli tört határértékét és aztán vesszük a kapott érték abszolút értékét és logaritmusát.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-2\varepsilon+3+\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}{2\varepsilon+3+\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}=?$$

Megpróbálhatunk most is behelyettesíteni ε helyére 0-t, de a tört $\frac{0}{0}$-ra egyszerűsödik. Ezért L'Hospital-unk.

(a)

$$\begin{gathered}
\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(-2\varepsilon+3+\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)\right)}{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(2\varepsilon+3+\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)\right)}=\\
\frac{-2+\frac{3-2\varepsilon}{\sqrt{9+3\varepsilon-\varepsilon^2}}\left(2-\sqrt{5}\right)}{2+\frac{-3-2\varepsilon}{\sqrt{9-3\varepsilon-\varepsilon^2}}\left(2-\sqrt{5}\right)}
\end{gathered}$$

Ebbe már behelyettesíthetünk 0-t.

$$\begin{gathered}
\frac{-2+\frac{3}{\sqrt{9}}\left(2-\sqrt{5}\right)}{2+\frac{-3}{\sqrt{9}}\left(2-\sqrt{5}\right)}=\\
\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=-1
\end{gathered}$$

Hogy megkapjuk (9)-t:

$$\frac{1}{3}\ln|-1|=0$$

Ebből azt kapjuk, hogy amikor (6)-nak a határértékét számoljuk, akkor el kell hagyni az összegből (7)-t és (8)-t, a többibe pedig egyszerűen beírni $\varepsilon=0$-t.

$$\begin{gathered}
\mathrm{CHW}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\\
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=
\end{gathered}$$

$$\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9}}-2-\sqrt{5}\right|-$$
$$\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{-2+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3-1}}-2-\sqrt{5}\right|-$$
$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{-2+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9+3-1}}+2-\sqrt{5}\right|+$$
$$\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{2+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3-1}}-2-\sqrt{5}\right|+$$
$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9-3-1}}+2-\sqrt{5}\right|-$$
$$\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{3}{3\sqrt{5}+2\sqrt{9}}-2-\sqrt{5}\right|=$$

$$\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{5}+2}-2-\sqrt{5}\right|-$$
$$\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{11}}-2-\sqrt{5}\right|-$$
$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{11}}+2-\sqrt{5}\right|+$$
$$\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{5}{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}}-2-\sqrt{5}\right|+$$
$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{5}{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}}+2-\sqrt{5}\right|-$$
$$\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{5}+2}-2-\sqrt{5}\right|\approx 0.121386$$

Lehetne még egyszerüsíteni a képletet gyöktelenítéssel, de a lényeg az, hogy ha kaptunk egy konkrét értéket (amiben sem x, sem ε nem szerepel), akkor készen vagyunk.

$$\mathrm{CHW}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x\sqrt{9-3x-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{3}\log\left(-\frac{1}{5}\left(2\sqrt{5}-5\right)\left(7+2\sqrt{11}\right)\right)$$