11. feladatsor - Megoldások
Matematika A1

1. Számítsuk ki az $f(x) = x + 1$ függvényhez, a $[0, 1]$ intervallum $\Phi = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ felosztásához és az $\mathbf{c} = (\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5})$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összeget!

   Megoldás: $I_{\Phi,\mathbf{c}} = (\frac{1}{4} + 1)(\frac{1}{3} - 0) + (\frac{2}{5} + 1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} + 1)(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) + (\frac{4}{5} + 1)(1 - \frac{3}{4}) = \frac{91}{60}$

2. Keressük meg azokat a c számokat, amelyek kielégítik a megadott függvényre és intervallumra vonatkozó integrál-középértéktételt!

   a) $f(x) = 3x^2 \qquad [-4, -1]$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad [0, \frac{\pi}{4}]$

   Megoldás: Mindkét részben olyan c számot keresünk, hogy $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

   a) $f(c) = 3c^2 = \dfrac{1}{-1-(-4)} \displaystyle\int_{-4}^{-1} 3x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-4}^{-1} = \frac{1}{3}(-1-(-64)) = 21 \Longrightarrow c^2 = 7 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{7}$
   $\Longrightarrow$ Ezek közül $c = -\sqrt{7}$ esik a szóban forgó intervallumba.

   b) $f(c) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{4} - 0} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{tg} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}(1-0) = \frac{4}{\pi} \Longrightarrow \cos^2 c = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \cos c =$ $\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Longrightarrow$ Most olyan c kell, ami a $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumban van, így $c = \arccos\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. a) Legyen $f \geq 0$ differenciálható konvex függvény $[a, b]$-n. Bizonyítsuk be geometriailag, hogy
   $(b-a) \cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}.$
   (Minek a területe a bal-, illetve jobb oldali kifejezés?)

   b) Az a) rész segítségével adjunk alsó és felső becslést az $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\ \mathrm{d}x$ integrálra!

   Megoldás:

   - A jobb oldali kifejezés annak a trapéznak a területe, aminek oldalai az x tengely, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, és a grafikon a és b-hez tartozó pontjait összekötő egyenes. Mivel f konvex, ezért ez nagyobb vagy egyenlő az f alatti területnél. A bal oldali kifejezés pedig annak a trapéznak a területe, amelynek oldalai x tengely, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, és a grafikonhoz húzott érintő egyenese az $\dfrac{a+b}{2}$ pontban. Mivel f kovex, ezért ez kisebb vagy egyenlő az f alatti terültenél.
   - Az a) rész képletében most $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$, így az alsó és felső becslések:

   $$\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3}{2})^3}} = (2-1) \cdot f\left(\frac{1+2}{2}\right) \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\ \mathrm{d}x \leq (2-1) \cdot \frac{f(1)+f(2)}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+1^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+2^3}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{6}$$

4. (Gy) Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

   a) $\displaystyle\int_1^4 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-1}^2 |3x(x-2)|\ \mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \arccos x\ \mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} e^{x^2}\ \mathrm{d}x$ (!) f) $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos x}\ \mathrm{d}x$

   Megoldás:

   a) $\displaystyle\int_1^4 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int_1^4 2x - x^{-\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^4 = (16 + \frac{2}{\sqrt{16}}) - (1 + \frac{2}{\sqrt{1}}) = 13,5$

   b) $e^x = u \Longleftrightarrow x = \ln u$ helyettesítéssel $\mathrm{d}x = \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u$, így $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\ \mathrm{d}x = \int_{e^0}^{e^2} \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u = *$

   $\dfrac{u-1}{(u+1)u} = \dfrac{A}{u+1} + \dfrac{B}{u} = \dfrac{Au + Bu + B}{(u+1)u} \Longrightarrow \begin{array}{l} u:\ 1 = A + B \\ 1:\ -1 = B \end{array} \Longrightarrow A = 2, B = -1 * = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2}{u+1} -$ $\dfrac{1}{u}\ \mathrm{d}u = \left[2\ln|u+1| - \ln|u|\right]_1^{e^2} = \left[\ln\left|\dfrac{(u+1)^2}{u}\right|\right]_1^{e^2} = \ln\dfrac{(e^2+1)^2}{e^2} - \ln 2$

c) Az integrálási tartományt szét kell választani aszerint, hogy az integrandusban az abszolút értéken belül milyen előjelű érték van. $3x(x-2) \geq 0 \iff x \geq 2$ vagy $x \leq 0$, így $\int\limits_{-1}^{2} |3x(x-2)|\,\mathrm{d}x =$

$\int\limits_{-1}^{0} |3x(x-2)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} |3x(x-2)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} 3x(x-2)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} -3x(x-2)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} 3x^2 - 6x\,\mathrm{d}x +$

$\int\limits_{0}^{2} -3x^2 + 6x\,\mathrm{d}x = \left[x^3 - 3x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-x^3 + 3x^2\right]_{0}^{2} = \{0 - (-4)\} + \{4 - 0\} = 8$

d) Parciálisan integrálva: $\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot \arccos x\,\mathrm{d}x = [x \cdot \arccos x]_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$

$= (1 \cdot \arccos 1 - (-1)\arccos(-1)) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$

$= 0 + \pi - \frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1} = \pi - (0 - 0) = \pi$

e) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}e^{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$, hiszen az integrandus páratkan függvény, és így a 0-ra szimmetrikus intervallumon 0 az integrálja (mert grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra).

f) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, így $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{2}|\sin\frac{x}{2}|\,\mathrm{d}x =$(szétválasztva aszerint, hogy az abszolút értéken beül pozitív vagy negatív érték van)$= \int\limits_{-\pi/3}^{0} \sqrt{2}(-\sin\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x +$

$\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_{-\pi/3}^{0} + \left[-\sqrt{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{\pi/2} = 2\sqrt{2}\left\{\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} + 2\sqrt{2}\left\{-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos 0\right\} =$
$2\sqrt{2}(1-\frac{1}{2}) + 2\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1) = 3\sqrt{2} - 2$

5. (Gy) Milyen alakú elemi törtfüggvényekre lehet felbontani az alábbi racionális törtfüggvényeket? (Nem kell kiszámítani az együtthatókat!)

a) $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)}$ b) $\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2}$ c) $\frac{1}{(x^2-9)^2}$

Megoldás:

a) $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3}$

b) $\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$

c) $\frac{1}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$

6. (Gy) Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \frac{2x+4}{2x^2+x-3}\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_{1}^{2} \frac{5x^2+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$ d) $\int\limits_{-1/2}^{3/2} \frac{1}{4x^2+4x+17}\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) $\frac{2x+4}{2x^2+x-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4}{(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{A(x+\frac{3}{2}) + B(x-1)}{(x-1)(x+\frac{3}{2})} \Longrightarrow \begin{array}{c} 2 = A + B \\ 4 = \frac{3}{2}A - B \end{array}$
$\Longrightarrow A = \frac{12}{5},\ B = -\frac{2}{5}$

$\int \frac{2x+4}{2x^2+x-3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|x+\frac{3}{2}| + C$

b) $\dfrac{5x^2+1}{x^3+x} = \dfrac{5x^2+1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} = \dfrac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$

$$\begin{aligned} &5 = A+B \\ \Longrightarrow \quad &0 = C \qquad \Longrightarrow A=1,\ B=4,\ C=0 \\ &1 = A \end{aligned}$$

$$\int\limits_1^2 \frac{5x^2+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|x| + 2\ln|x^2+1|\right]_1^2 = (\ln 2 + 2\ln 5) - (\ln 1 + 2\ln 2) = \ln\frac{25}{2}$$

c) $\dfrac{x^3-2x+1}{(x+1)^3} = \dfrac{x^3-2x+1}{x^3+3x^2+3x+1} = \dfrac{(x^3+3x^2+3x+1)-3x^2-5x}{x^3+3x^2+3x+1} =$

$1 + \dfrac{-3x^2-5x}{(x+1)^3} = 1 + \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+1)^3} = 1 + \dfrac{A(x+1)^2 + B(X+1) + C}{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned} &-3 = A \\ \Longrightarrow \quad &-5 = 2A+B \qquad \Longrightarrow A=-3,\ B=1,\ C=2 \\ &0 = A+B+C \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = x - 3\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + C.$$

d) $4x^2+4x+17 = (2x+1)^2 + 16 = 16\left(\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2+1\right)$

$$\int\limits_{-1/2}^{3/2} \frac{1}{4x^2+4x+17}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int\limits_{-1/2}^{3/2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_{-1/2}^{3/2} = \frac{1}{8}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}$$

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok