

11. feladatsor
Matematika A1

1. Számítsuk ki az $f(x) = x + 1$ függvényhez, a $[0, 1]$ intervallum $\Phi = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ felosztásához és az $(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5})$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összeget!

2. Keressük meg azokat a c számokat, amelyek kielégítik a megadott függvényre és intervallumra vonatkozó integrál-közéértéktételt!

a) $f(x) = 3x^2$ $[-4, -1]$

b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $[0, \frac{\pi}{4}]$

3. a) Legyen $f \geq 0$ differenciálható konvex függvény $[a, b]$ -n. Bizonyítsuk be geometriailag, hogy

$$(b - a) \cdot f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

(Minek a területe a bal-, illetve jobb oldali kifejezés?)

b) Az a) rész segítségével adjunk alsó és felső becslést az $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$ integrálra!

4. (Gy) Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

a) $\int_1^4 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

b) $\int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

c) $\int_{-1}^2 |3x(x - 2)| dx$

d) $\int_{-1}^1 \arccos x dx$

e) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} e^{x^2} dx$ (!)

f) $\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos x} dx$

5. (Gy) Milyen alakú elemi törtfüggvényekre lehet felbontani az alábbi racionális törtfüggvényeket? (Nem kell kiszámítani az együtthatókat!)

a) $\frac{x^2 + 3}{(x + 1)^2(x - 3)}$

b) $\frac{x + 2}{x(x^2 + 2x + 2)^2}$

c) $\frac{1}{(x^2 - 9)^2}$

6. (Gy) Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \frac{2x + 4}{2x^2 + x - 3} dx$

b) $\int_1^2 \frac{5x^2 + 1}{x^3 + x} dx$

c) $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{(x + 1)^3} dx$

d) $\int_{-1/2}^{3/2} \frac{1}{4x^2 + 4x + 17} dx$

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok