10. feladatsor - Megoldások
Matematika A1

1. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $x^4 - 3x^2 + 2$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ d) $\dfrac{x^4+2x-1}{x}$

Megoldások:

a) $\int x^4 - 3x^2 + 2\mathrm{dx} = \frac{1}{5}\mathrm{x}^5 - \mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x} + \mathrm{C}$

b) $\int \sqrt[3]{x^2}\mathrm{dx} = \int \mathrm{x}^{2/3}\mathrm{dx} = \frac{3}{5}\mathrm{x}^{5/3} + \mathrm{C}$

c) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\mathrm{dx} = \int \mathrm{x}^{7/8}\mathrm{dx} = \frac{8}{15}\mathrm{x}^{15/8} + \mathrm{C}$

d) $\int \frac{x^4+2x-1}{x}\mathrm{dx} = \int \mathrm{x}^3 + 2 - \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\mathrm{x}^4 + 2\mathrm{x} - \ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C}$

2. Keressük meg azt az $f(x)$ függvényt, amelyre

a) $f'(x) = 4x + \sin x$, és $f(0) = 0$; b) $f''(x) = 6x^2 + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, $f(1) = 0$, és $f'(1) = 2$.

Megoldás:

a) $f(x) = \int 4x + \sin x\mathrm{dx} = 2\mathrm{x}^2 - \cos\mathrm{x} + \mathrm{C}$, és $0 = f(0) = -1 + C$, tehát $C = 1$, és $f(x) = 2x^2 - \cos x + 1$.

b) $f'(x) = \int 6x^2 + x^{-3/2}\mathrm{dx} = 2\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^{-1/2} + \mathrm{C}$, és $2 = f'(1) = 2 - 2 + C$, így $C = 2$ és $f'(x) = 2x^3 - 2x^{-1/2} + 2$. Ebből $f(x) = \int 2x^3 - 2x^{-1/2} + 2\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\mathrm{x}^4 - 4\mathrm{x}^{1/2} + 2\mathrm{x} + \mathrm{D}$, és $0 = f(1) = \frac{1}{2} - 4 + 2 + D$, tehát $D = \frac{3}{2}$, és $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4\sqrt{x} + 2x + \frac{3}{2}$.

3. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját az $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ összefüggést használva!

a) $\sqrt[4]{2-3x}$ b) $\dfrac{e^x+1}{e^{2x}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+3x^2}}$

Megoldás:

a) $\int \sqrt[4]{2-3x}\mathrm{dx} = \int (-3\mathrm{x}+2)^{1/4}\mathrm{dx} = \frac{4}{5}(-\frac{1}{3})(-3\mathrm{x}+2)^{5/4} + \mathrm{C} = -\frac{4}{15}(-3\mathrm{x}+2)^{5/4} + \mathrm{C}$

b) $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}}\mathrm{dx} = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\mathrm{dx} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} + \mathrm{C}$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{3}\mathrm{x})^2}}\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arsh}(\sqrt{3}\mathrm{x}) + \mathrm{C}$

4. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját az $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ összefüggést használva!

a) $\dfrac{x^3}{x^4+4}$ b) $\operatorname{tg} 3x$ c) $\dfrac{1}{x\ln x}$

Megoldás:

a) $\int \frac{x^3}{x^4+4}\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\int \frac{(\mathrm{x}^4+4)'}{\mathrm{x}^4+4}\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\ln|\mathrm{x}^4+4| + \mathrm{C} = \frac{1}{4}\ln(\mathrm{x}^4+4) + \mathrm{C}$

b) $\int \operatorname{tg} 3x\mathrm{dx} = \int \frac{\sin 3\mathrm{x}}{\cos 3\mathrm{x}}\mathrm{dx} = -\frac{1}{3}\int \frac{(\cos 3\mathrm{x})'}{\cos 3\mathrm{x}}\mathrm{dx} = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3\mathrm{x}| + \mathrm{C}$

c) $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{\mathrm{x}}}{\ln \mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int \frac{(\ln \mathrm{x})'}{\ln \mathrm{x}}\mathrm{dx} = \ln|\ln \mathrm{x}| + \mathrm{C}$

5. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját az $\int f^a(x)f'(x)dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + C$ összefüggést használva!

a) $\sin^4 x \cos x$ b) $x\sqrt{x^2+1}$ c) $\frac{\ln x}{x}$

Megoldás:

a) $\int \sin^4 x \cos x \mathrm{dx} = \int \sin^4 \mathrm{x}(\sin \mathrm{x})'\mathrm{dx} = \frac{\sin^5 \mathrm{x}}{5} + \mathrm{C}$

b) $\int x\sqrt{x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int (\mathrm{x}^2+1)^{1/2}(\mathrm{x}^2+1)'\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{x}^2+1)^{3/2}}{3/2} + \mathrm{C} = \frac{1}{3}(\mathrm{x}^2+1)^{3/2} + \mathrm{C}$

c) $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{dx} = \int \ln \mathrm{x}(\ln \mathrm{x})'\mathrm{dx} = \frac{\ln^2 \mathrm{x}}{2} + \mathrm{C}$

6. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját az általános $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$ összefüggést használva!

a) xe^{x^2} b) $\frac{\sin(\ln x)}{x}$ c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Megoldás:

a) $\int xe^{x^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}^2}2\mathrm{xdx} = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}^2}(\mathrm{x}^2)'\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}^2} + \mathrm{C}$

b) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\mathrm{dx} = \int \sin(\ln \mathrm{x})\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int \sin(\ln \mathrm{x})(\ln \mathrm{x})'\mathrm{dx} = -\cos(\ln \mathrm{x}) + \mathrm{C}$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int (1-\mathrm{x}^2)^{-1/2}(-2\mathrm{x})\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int (1-\mathrm{x}^2)^{-1/2}(1-\mathrm{x}^2)'\mathrm{dx} = -(1-\mathrm{x}^2)^{1/2} + \mathrm{C}$

7. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját trigonometrikus átalakítások segítségével!

a) $\mathrm{tg}^2 x$ b) $\cos^5 x \,\mathrm{tg}\, x$ c) $\sqrt{1+\cos 4x}$

Megoldás:

a) $\int \mathrm{tg}^2 x\mathrm{dx} = \int \frac{\sin^2 \mathrm{x}}{\cos^2}\mathrm{dx} = \int \frac{1-\cos^2 \mathrm{x}}{\cos^2 \mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\cos^2 \mathrm{x}} - 1\mathrm{dx} = \mathrm{tg}\,\mathrm{x} - \mathrm{x} + \mathrm{C}$

b) $\int \cos^5 x \,\mathrm{tg}\, x\mathrm{dx} = \int \cos^4 \mathrm{x} \sin \mathrm{xdx} = -\int \cos^4 \mathrm{x}(\cos \mathrm{x})'\mathrm{dx} = -\frac{\cos^5 \mathrm{x}}{5} + \mathrm{C}$

c) $\int \sqrt{1+\cos 4x}\mathrm{dx} = \int \sqrt{2\left(\frac{1+\cos 4\mathrm{x}}{2}\right)}\mathrm{dx} = \int \sqrt{2(\cos^2 2\mathrm{x})}\mathrm{dx} = \sqrt{2}\int \cos 2\mathrm{xdx} = \sqrt{2}\frac{\sin 2\mathrm{x}}{2} + \mathrm{C} = \frac{\sin 2\mathrm{x}}{\sqrt{2}} + \mathrm{C}$ (ez a határozatlan integrál olyan I intervallumon érvényes, ahol $\cos 2x \geq 0$)

8. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéses integrálással!

a) $e^{3x}\sqrt{e^x-1}$ b) $\frac{x^3}{(x^2+1)^5}$ c) $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$

Megoldás:

a) $u = e^x - 1$ helyettesítéssel $\mathrm{du} = \mathrm{e^x dx}$, így $\int e^{3x}\sqrt{e^x-1}\mathrm{dx} = \int \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}\sqrt{\mathrm{e^x}-1}\ \mathrm{e^x dx} = \int (u+1)^2\sqrt{u}\mathrm{du} = \int \mathrm{u}^{5/2} + 2\mathrm{u}^{3/2} + \mathrm{u}^{1/2}\mathrm{du} = \frac{2}{7}\mathrm{u}^{7/2} + \frac{4}{5}\mathrm{u}^{5/2} + \frac{2}{3}\mathrm{u}^{3/2} + \mathrm{C} = \frac{2}{7}(\mathrm{e^x}-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(e^x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(e^x-1)^{3/2} + C$

b) $u = x^2 + 1$ helyettesítéssel $du = 2x\mathrm{dx}$, és $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^5}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{x}^2}{(\mathrm{x}^2+1)^5}\ 2\mathrm{xdx} = \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{u}-1}{\mathrm{u}^5}\mathrm{du} = \int \frac{1}{2}\mathrm{u}^{-4} - \frac{1}{2}\mathrm{u}^{-5}\mathrm{du} = -\frac{1}{6}\mathrm{u}^{-3} + \frac{1}{8}\mathrm{u}^{-4} + \mathrm{C} = -\frac{1}{6}(\mathrm{x}^2+1)^{-3} + \frac{1}{8}(\mathrm{x}^2+1)^{-4} + \mathrm{C}$

c) $u = \sqrt[6]{x}$ helyettesítéssel $du = \frac{1}{6}x^{-5/6}\mathrm{dx}$, és $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}\mathrm{dx} = \int \frac{6\mathrm{x}^{5/6}}{\mathrm{x}^{1/2}(\mathrm{x}^{1/3}+1)}\cdot\frac{1}{6}\mathrm{x}^{-5/6}\mathrm{dx} = \int \frac{6\mathrm{x}^{1/3}}{\mathrm{x}^{1/3}+1}\cdot\frac{1}{6}\mathrm{x}^{-5/6}\mathrm{dx} = \int \frac{6\mathrm{u}^2}{\mathrm{u}^2+1}\mathrm{du} = \int 6 - \frac{6}{\mathrm{u}^2+1}\mathrm{du} = 6\mathrm{u} - 6\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{u} + \mathrm{C} = 6\sqrt[6]{x} - 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + \mathrm{C}$

9. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját parciális integrálással!

a) $\dfrac{x^2-x+2}{e^{2x}}$ b) $e^{3x}\cos 2x$ c) $\ln x$ d) $\ln^2 x$

Megoldás: A megoldásokban aláhúzás mutatja azt a tagot, amelyik a parciálás integrálás során deriválódik.

a) $\int \underline{(x^2-x+2)}\cdot e^{-2x}\mathrm{dx} = (\mathrm{x^2-x+2})\cdot\dfrac{\mathrm{e^{-2x}}}{-2} - \int (\mathrm{2x-1})\cdot\dfrac{\mathrm{e^{-2x}}}{-2}\mathrm{dx} = -\dfrac{\mathrm{x^2-x+2}}{2}\cdot\mathrm{e^{-2x}} + \dfrac{1}{2}\int \underline{(\mathrm{2x-1})}\cdot \mathrm{e^{-2x}dx} = -\dfrac{\mathrm{x^2-x+2}}{2}\cdot\mathrm{e^{-2x}} + \dfrac{1}{2}(\mathrm{2x-1})\cdot\dfrac{\mathrm{e^{-2x}}}{-2} - \dfrac{1}{2}\int 2\cdot\dfrac{\mathrm{e^{-2x}}}{-2}\mathrm{dx} = -\dfrac{\mathrm{x^2-x+2}}{2}\cdot\mathrm{e^{-2x}} - \dfrac{\mathrm{2x-1}}{4}\cdot \mathrm{e^{-2x}} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e^{-2x}} + \mathrm{C} = \left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{x^2}-1\right)\cdot\mathrm{e^{-2x}} + \mathrm{C}$

b) $\int e^{3x}\cdot\underline{\cos 2x}\ \mathrm{dx} = \dfrac{\mathrm{e^{3x}}}{3}\cdot\cos 2\mathrm{x} - \int\dfrac{\mathrm{e^{3x}}}{3}\cdot(-2\sin 2\mathrm{x})\mathrm{dx} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e^{3x}}\cdot\cos 2\mathrm{x} + \dfrac{2}{3}\int \mathrm{e^{3x}}\cdot\underline{\sin 2\mathrm{x}}\ \mathrm{dx} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e^{3x}}\cdot\cos 2\mathrm{x} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{e^{3x}}}{3}\cdot\sin 2\mathrm{x} - \dfrac{2}{3}\int\dfrac{\mathrm{e^{3x}}}{3}\cdot 2\cos 2\mathrm{x}\ \mathrm{dx} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e^{3x}}\cos 2\mathrm{x} + \dfrac{2}{9}\mathrm{e^{3x}}\cdot\sin 2\mathrm{x} - \dfrac{4}{9}\int \mathrm{e^{3x}}\cdot\cos 2\mathrm{xdx}.$

Ebből az ismeretlen $I = \int e^{2x}\cos 3x\mathrm{dx}$ integrálra az $I = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{3x}\cdot\sin 2x - \frac{4}{9}I$ egyenletet kapjuk. Így $I = \frac{3}{13}e^{3x}\cdot\cos 2x + \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + C$.

c) $\int \ln x\ \mathrm{dx} = \int 1\cdot\underline{\ln \mathrm{x}}\ \mathrm{dx} = \mathrm{x}\cdot\ln\mathrm{x} - \int \mathrm{x}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{x}}\ \mathrm{dx} = \mathrm{x}\cdot\ln\mathrm{x} - \int 1\ \mathrm{dx} = \mathrm{x}\cdot\ln\mathrm{x} - \mathrm{x} + \mathrm{C}$

d) $\int \ln^2 x\ \mathrm{dx} = \int 1\cdot\underline{\ln^2\mathrm{x}}\ \mathrm{dx} = \mathrm{x}\cdot\ln^2\mathrm{x} - \int \mathrm{x}\cdot 2\ln\mathrm{x}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{x}}\ \mathrm{dx} = \mathrm{x}\cdot\ln^2\mathrm{x} - 2\int \ln\mathrm{x}\ \mathrm{dx} = (\text{előző alapján}) = \mathrm{x}\cdot\ln^2\mathrm{x} - 2\mathrm{x}\cdot\ln\mathrm{x} + 2\mathrm{x} + \mathrm{C}$

10. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját a megfelelő összefüggés/módszer használatával!

a) $\sin\sqrt{x}$ b) $\dfrac{1}{x^2+4}$ c) $(x+2)\cos x$ d) $\cos x\sin^3 x$

e) $\cos^4 x$ f) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ g) $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ h) $\operatorname{sh} x\sin x$

Megoldás:

a) $u=\sqrt{x}$ helyettesítéssel $\mathrm{du} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\ \mathrm{dx}$, így $\int \sin\sqrt{x}\ \mathrm{dx} = \int \sin\sqrt{\mathrm{x}}\cdot 2\sqrt{\mathrm{x}}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\ \mathrm{dx} = \int \sin\mathrm{u}\cdot\underline{2\mathrm{u}}\ \mathrm{du} = (\text{parciálisan integrálva}) = -\cos\mathrm{u}\cdot 2\mathrm{u} - \int -\cos\mathrm{u}\cdot 2\ \mathrm{du} = -\cos\mathrm{u}\cdot 2\mathrm{u} + 2\int\cos\mathrm{u}\ \mathrm{du} = -\cos\mathrm{u}\cdot 2\mathrm{u} + 2\sin\mathrm{u} + \mathrm{C} = -\cos\sqrt{\mathrm{x}}\cdot 2\sqrt{\mathrm{x}} + 2\sin\sqrt{\mathrm{x}} + \mathrm{C}$

b) $\int\dfrac{1}{x^2+4}\ \mathrm{dx} = \dfrac{1}{4}\int\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}\right)^2+1}\ \mathrm{dx} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}\right)}{\frac{1}{2}} + \mathrm{C} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{x}\right) + \mathrm{C}$

c) Parciálisan integrálva: $\int \underline{(x+2)}\cos x\ \mathrm{dx} = (\mathrm{x}+2)\sin\mathrm{x} - \int 1\cdot\sin\mathrm{x}\ \mathrm{dx} = (\mathrm{x}+2)\sin\mathrm{x} - (-\cos\mathrm{x}) + \mathrm{C} = (\mathrm{x}+2)\sin\mathrm{x} + \cos\mathrm{x} + \mathrm{C}$

d) $\int\cos x\sin^3 x\ \mathrm{dx} = \int\sin^3\mathrm{x}(\sin\mathrm{x})'\ \mathrm{dx} = \dfrac{\sin^4\mathrm{x}}{4} + \mathrm{C}$

e) $\int\cos^4 x\ \mathrm{dx} = \int\left(\dfrac{1+\cos 2\mathrm{x}}{2}\right)^2\ \mathrm{dx} = \dfrac{1}{4}\int 1 + 2\cos 2\mathrm{x} + \cos^2 2\mathrm{x}\ \mathrm{dx} = \dfrac{1}{4}\int 1 + 2\cos 2\mathrm{x} + \dfrac{1+\cos 4\mathrm{x}}{2}\ \mathrm{dx} = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{x} + 2\cdot\dfrac{\sin 2\mathrm{x}}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{x} + \dfrac{\sin 4\mathrm{x}}{4}\right)\right) + \mathrm{C} = \dfrac{3}{8}\mathrm{x} + \dfrac{1}{4}\sin 2\mathrm{x} + \dfrac{1}{32}\sin 4\mathrm{x} + \mathrm{C}$

f) $\int\dfrac{e^x}{e^x+1}\ \mathrm{dx} = \int\dfrac{(\mathrm{e^x}+1)'}{\mathrm{e^x}+1}\ \mathrm{dx} = \ln|\mathrm{e^x}+1| + \mathrm{C} = \ln(\mathrm{e^x}+1) + \mathrm{C}$

g) $u=\sqrt{x}$ helyettesítéssel $\mathrm{du} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\ \mathrm{dx}$, így $\int\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{dx} = \int 2\cos\sqrt{\mathrm{x}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\ \mathrm{dx} = \int 2\cos\mathrm{u}\ \mathrm{du} = 2\sin\mathrm{u} + \mathrm{C} = 2\sin\sqrt{\mathrm{x}} + \mathrm{C}$

h) Parciálisan integrálva kétszer: $\int\operatorname{sh}x\cdot\underline{\sin x}\ \mathrm{dx} = \operatorname{ch}\mathrm{x}\cdot\sin\mathrm{x} - \int\operatorname{ch}\mathrm{x}\cdot\underline{\cos\mathrm{x}}\ \mathrm{dx} = \operatorname{ch}\mathrm{x}\cdot\sin\mathrm{x} - \operatorname{sh}\mathrm{x}\cdot\cos\mathrm{x} + \int\operatorname{sh}\mathrm{x}\cdot(-\sin\mathrm{x})\ \mathrm{dx}$. Ebből az ismeretlen $I = \int\operatorname{sh}x\cdot\sin x\mathrm{dx}$ integrálra az $I = \operatorname{ch}x\cdot\sin x - \operatorname{sh}x\cdot\cos x - I$ egyenletet kapjuk. Így $I = \dfrac{\operatorname{ch}x\cdot\sin x - \operatorname{sh}x\cdot\cos x}{2} + C$.