4. gyakorlat
Matematika A1

1. Ábrázoljuk a $z_1 = 2+i$, $z_2 = 1-i$, $\overline{z_1}$, $\frac{z_1}{z_1 i}$, z_1+z_2, z_1-z_2 komplex számokat a síkon!

   Megoldás: $z_1 = 2+i$ a $(2,1)$, $z_2 = 1-i$ az $(1,-1)$ koordinátájú pont helyvektora.
   $\overline{z}_1$ a z_1 tükörképe az x tengelyre (a $(2,-1)$ koordinátájú pont helyvektora).
   $\frac{z_1}{z_1 i} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$, vagyis a $(0,-1)$ koordinátájú pont helyvektora.
   A $z_1+z_2 = 3$ ($(3,0)$ koordinátájú pont helyvektora) és $z_1 - z_2 = 1+2i$ ($(1,2)$ koordinátájú pont helyvektora) számok helyvektorait vektorösszeadással, illetve kivonással is megkaphatjuk a z_1 és z_2-ből.

2. (Gy) Számítsuk ki az alábbi komplex kifejezések értékét:
   a) $\frac{2+i}{2-i}$ b) $(\overline{3+i})\cdot\frac{5}{i}$ c) $(1+i)^3$ d) $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^8$
   e) $(-\mathrm{i})^n$, $n\in\mathbb{Z}$ f) $\sqrt[4]{-16}$ g) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+\mathrm{i}4\sqrt{2}}$ h) $\sqrt[5]{(1+i)^5}$

   Megoldás:
   a) $\dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{(2+i)(2+i)}{5} = \dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$
   b) $(\overline{3+i})\cdot\dfrac{5}{i} = (3-i)(-5i) = -5-15i$
   c) $(1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = -2+2i$
   d) $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^8 = 2^4(1-i)^8 = 16\cdot(-2i)^4 = 256$
   e) $(-i)^1 = -i$, $(-i)^2 = i^2 = -1$, $(-i)^3 = (-i)^2\cdot(-i) = (-1)\cdot(-i) = i$, $(-i)^4 = (-i)^3\cdot(-i) = i\cdot(-i) = -i^2 = 1$ és utána ezek ismétlődnek ciklikusan.
   f) $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi) \Longrightarrow \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}(\cos(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}))$, $k = 0,1,2,3 \Longrightarrow$ a 4 gyök: $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$,$z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$,$z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$
   g) $-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2} = 8(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}) \Longrightarrow \sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8}(\cos(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}))$, $k = 0,1,2 \Longrightarrow$ a 3 gyök: $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_1 = 2(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12})$, $z_2 = 2(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12})$
   h) $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) \Longrightarrow (1+i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos 5\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 5\cdot\frac{\pi}{4}) \Longrightarrow \sqrt[5]{(1+i)^5} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{5}) + \sin(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{5}))$. Szemléletesen arról van szó, hogy $\sqrt[5]{(1+i)^5}$ 5 db komplex szám. Az $(1+i)$ ezek közül csak egy, a többit úgy kapjuk, hogy ezt elforhatjuk $k\cdot\frac{2\pi}{5}$ szöggel ($k = 1,2,3,4$).

3. Mivel kell a z komplex számot megszorozni, hogy az eredmény helyvektorát a z helyvektorának (origo körüli) $+120°$-kal való elforgatásával, és a vektor 2-szeresére nagyításával kapjuk meg?

   Megoldás: $2(\cos 120° + i\sin 120°)$-vel, azaz $-1+\sqrt{3}i$-vel.

4. Egy négyzet két csúcsát a $z_1 = 0$ és $z_2 = 3+4i$ komplex számok adják meg. Határozzuk meg a négyzet hiányzó csúcsait!

   Megoldás: Ha a $z_1 = 0$ és $z_2 = 3+4i$ csúcsok szomszédosak, akkor a z_1-gyel szomszédos harmadik csúcsot, z_4-et, a z_2-nek az z_1 (azaz az origó) körüli 90vagy -90 fokos elforgatásával, azaz i-vel vagy $-i$-vel való szorzással kapjuk, z_3-at pedig a $z_3 = z_2 + z_4$ összefüggésből. Ennek megfelelően $z_4 = -4+3i$ és $z_3 = -1+7i$ vagy $z_4 = 4-3i$ és $z_3 = 7+i$.
   Ha z_1 és z_2 a négyzet átlóját adják, akkor ebből a másik két csúcsot a $z_1 = 0$ körüli $\pm 45°$-os, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányú forgatvanyújtással, azaz $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$-vel való szorzással kapjuk, így ez a két csúcs $(3+4i)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i) = -\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$ és $(3+4i)\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i) = \frac{7}{2}+\frac{1}{2}i$.

5. Mi a mértani helye a komplex számsík azon z pontjainak, amelyekre
   a) $|z+2-i| = 4$ b) $1 < |z| < 3$ c) $|z-2|+|z+2| = 16$
   d) $|z-i| = |z-2-i|$ e) $Re((1+i)z) = 4$

   Megoldás:
   a) $|z-(-2+i)| = 4$, vagyis egy 4 sugarú $-2+i$ középpontú kör.

b) Origó középpontú körgyűrű, amelynek külső sugara 3, belső sugara 1, és a határvonalak nem tartoznak hozzá (azaz nyílt körgyűrű).

c) az egyenlet szerint z-nek a 2-től és a -2-től vett távolságösszege 16, vagyis a mértani hely nem más, mint a 2 és -2 fókuszpontú ellipszis, amelynek (vízszintes) nagytengelye 16 hosszú, vagyis az ellipszis a $(-8,0)$ és $(8,0)$ pontokban metszi az x tengelyt.

d) Az egyenlet szerint z ugyanolyan messze van az i és a $2+i$ számoktól, vagyis a mártani hely nem más, mint a komplex sík i és $2+i$ pontjait összekötő szakasz felező merőlegese (az $x=1$ egyenletű egyenes).

e) Azokat a $z=x+iy$ komplex számokat keressük, amikre $(1+i)(x+iy)$ valós része 4, vagyis $x-y=4$. Ezek a pontok egy egyenest határoznak meg ($y=x-4$ egyenletű egyenes a síkon).

6. (Gy) Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket és ábrázoljuk a megoldásokat a komplex számsíkon!
a) $z^2-6z+13=0$ b) $z^4(2-3i)=-32+48i$ c) $z^6+2z^3+2=0$ d) $|\overline{z}|=-4z$

Megoldás:

a) $z_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot13}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=frac6\pm4i2=3\pm2i$

b) $z^4=\frac{-32+48i}{2-3i}=\frac{-16(2-3i)}{2-3i}=-16\Longrightarrow z=\sqrt[4]{-16}\Longrightarrow$ lásd 2. feladat f)

c) Másodfokú egyenlet $y=z^3$-ban. $y_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot2}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i=\sqrt{2}(\cos(\pm\dfrac{3\pi}{4})+i\sin(\pm\dfrac{3\pi}{4}))$. Az eredeti egyenlet megoldása ezen értékek köbgyökei: $z_{1,2,3}=\sqrt[3]{y_1}=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{3}))$, $k=0,1,2$ és $z_{4,5,6}=\sqrt[3]{y_2}=\sqrt[6]{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{3}))$, $k=0,1,2$

d) $z=x+iy$-t helyettesítve $|x-iy|=-4x-i4y\Longleftrightarrow\sqrt{x^2+(-y)^2}=-4x-i4y$. Az algebrai alak egyértelműsége miatt ez csak akkor lehet, ha a két oldalon a valós és képzetes részek megegyeznek, vagyis $\sqrt{x^2+y^2}=-4x$ és $0=-4y$. A második egyenlet miatt $y=0$, és ezt az elsőbe helyettesítve $\sqrt{x^2}=-4x\Longrightarrow x^2=16x^2\Longrightarrow x=0$. Tehát az eredeti egyenlet megoldása $z=0$.

7. a) Adjunk példát olyan 1 abszolút értékű komplex számra, amely nem egységgyök!

b) (*) Bizonyítsuk be, hogy ha két egységgyök összege is 1 abszolút értékű, akkor az is egységgyök!

Megoldás:

a) Egy $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ (1 abszolút értékű) koplex szám akkor lesz egységgyök, ha valamely n pozitív egészre $1=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$, vagyis ha valamely n-re $n\varphi$ a 2π egész számú többszöröse. Ilyen n pontosan akkor létezik, ha a $\frac{\varphi}{2\pi}$ hányados racionális. Vagyis nekünk olyan φ szög kell, amire ez a hányados irracionális. Mivel π irracionális, ezt könnyen elérhetjük, ha pl. φ-t (radiánban mérve!) racionálisnak választjuk, pl. $\varphi=1$. $\Longrightarrow$ egy megfelelő szám $\cos1+i\sin1$.

b) Tekintsük a 2 egységgyök összegét vektoros alakban. Ha az összeg is 1 abszolút értékű, akkor az összeadáskor használt paralelogramma olyan, hogy minden oldala és az egyik átlója is 1 hosszú. Könnyen látható hogy ez csak akkor lehet, ha a két egységgyök 120°-os szöget zár be egymással. Ekkor a két egységgyök $z,(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})z$ alakba írható, és az összegük $(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})z$. z szöge legyen φ. Ekkor $(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})z$ szöge $\frac{\pi}{3}+\varphi$. Az a) részből tudjuk, hogy az összeg pontosan akkor egységgyök, ha $\frac{\frac{\pi}{3}+\varphi}{2\pi}=\frac{1}{6}+\frac{\varphi}{2\pi}$ racionális, ami most teljesül, hiszen z egységgyök, így $\frac{\varphi}{2\pi}$.

8. (*) Számítsuk ki a komplex n-edik egységgyökök összegét minden n pozitív egészre!

Megoldás: Ha $n=1$, akkor ez az összeg 1. Ha $n>1$, akkor a keresett összeget jelölje Z. Felrajzolva az n-edik egységgyököket, azt láthatjuk, hogy ha az ábrát elforgatjuk $\frac{2\pi}{n}$-el, akkor az önmagába fordul. Ez a forgatás ugyanakkor megvalósítható $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$-vel való szorzásként is. Ebből azt látjuk, hogy az elforgatott egységvektorok összege εZ kell hogy legyen, ugyankkor a geometriai realizáció azt mutatja, hogy az összeg továbbra is Z. $\Longrightarrow\varepsilon Z=Z\Longrightarrow(\varepsilon-1)Z=0\Longrightarrow$ Ha $n>1$, akkor $(\varepsilon-1)\neq0$, vagyis $Z=0$ kell, hogy teljesüljön, tehát $n>1$-re az n-edik egységgyökök összege 0.

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok