3. feladatsor - -Megoldások
Matematika A1

1. (Gy) Írjuk fel azon egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletét, amely
   a) átmegy az $A(-2,5,1)$ ponton és párhuzamos az $\underline{a} = (-1,2,3)$ vektorral!
   b) párhuzamos a $\underline{j} = (0,1,0)$ vektorral, és átmegy az $A(5,1,4)$ ponton!
   c) átmegy a $P(3,1,2)$ és $Q(-1,1,3)$ pontokon!
   d) átmegy a $(0,7,0)$ ponton és merőleges $x + 2y + 2z = 13$ egyenletű síkra!

Megoldások:

a) Az egyenes egy pontja $A(-2,5,1)$, irányvektora $\underline{a} = (-1,2,3)$, így egyenlete

$$\text{paraméteres:}\quad \begin{array}{l} x = -2 - t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{array} \iff \text{paramétermentes:}\quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{3}$$

b) Az egyenes egy pontja $A(5,1,4)$, irányvektora $\underline{j} = (0,1,0)$, így egyenletei:

$$\text{paraméteres:}\quad \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 + t \\ z = 4 \end{array} \iff \text{paramétermentes: } x = 5, z = 4$$

c) Az egyenes egy pontja $P(3,1,2)$, irányvektora $\overrightarrow{PQ} = (-4,0,1)$, így egyenlete

$$\begin{array}{l} x = 3 - 4t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{array} \iff \frac{x-3}{-4} = \frac{z-2}{1}, y = 1$$

d) Az egyenes egy pontja $(0,7,0)$, irányvektora pedig épp a sík $\underline{n} = (1,2,2)$ normálvektora, így egyenlete

$$\begin{array}{l} x = t \\ y = 7 + 2t \\ z = 2t \end{array} \iff \frac{x}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{2}$$

2. (Gy) Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely
   a) átmegy az $A(1,5,2)$ ponton és párhuzamos a $7x - y + 3z = 0$ egyenletű síkkal!
   b) átmegy az $A(2,1,-3)$ és $B(-1,0,1)$ pontokon és párhuzamos a $\underline{v} = (3,-2,0)$ vektorral!

Megoldások:

a) A sík egy pontja $A(1,5,2)$ és normálvektora megegyezik a megadott sík $\underline{n} = (7,-1,3)$ normálvektorával, így egyenlete

$$7(x-1) - 1(y-5) + 3(z-2) = 0 \implies 7x - y + 3z = 8$$

b) A sík egy pontja $A(2,1,-2)$ és normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \underline{v} = (-3,-1,4) \times (3,-2,0) = (8,12,9)$, így egyenlete

$$8(x-2) + 12(y-1) + 9(z+2) = 0 \implies 8x + 12y + 9z = -10$$

3. (Gy) Vizsgáljuk meg, hogy a megadott három pont egy egyenesbe esik-e; ha nem, írjuk fel a megadott pontokon áthaladó sík egyenletét!
   a) $(-3,0,4)$, $(4,1,2)$, $(0,0,0)$
   b) $(-2,3,1)$, $(0,5,2)$, $(-4,1,0)$
   c) $(1,1,-1)$, $(2,0,2)$, $(0,-2,1)$

Megoldások: Az A,B,C pontok pontosan akkor nem esnek egy egyenesbe, ha az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok nem párhuzamosk (nem egymás számszorosai). Ha ez teljesül, akkor az általuk meghatározott sík normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

a) $A(0,0,0)$, $B(-3,0,4)$, $C(4,1,2) \implies \overrightarrow{AB} = (-3,0,4)$ és $\overrightarrow{AC} = (4,1,2)$. Ez a két vektor nem egymás számszorosa, így nem párhuzamosak. Az általuk meghatározott sík egy pontja pl. $A(0,0,0)$, normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3,0,4) \times (4,1,2) = (-4,22,-3)$, így egynlete

$$-4(x-0) + 22(y-0) - 3(z-0) = 0 \implies -4x + 22y - 3z = 0$$

b) $A(-2,3,1),\ B(0,5,2),\ C(-4,1,0) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (2,2,1)$ és $\overrightarrow{AC} = (-2,-2,-1)$. Ez a két vektor egymás -1-szerese, vagyis párhuzamosak, így egy egyenesbe esnek.

c) $A(1,1,-1),\ B(2,0,2),\ C(0,-2,1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (1,-1,3)$ és $\overrightarrow{AC} = (-1,-3,2)$. Ez a két vektor nem egymás számszorosa, így nem párhuzamosak. Az általuk meghatározott sík egy pontja pl. $A(1,1,-1)$, normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,-1,3) \times (-1,-3,2) = (7,-5,-4)$, így egynlete

$$7(x-1) - 5(y-1) - 4(z+1) = 0 \Longrightarrow 7x - 5y - 4z = 6$$

4. (Gy) Állapítsuk meg az alábbi egyenesek kölcsönös helyzetét (azonos; párhuzamos, de nem azonos; metsző; kitérő)! Ha metszőek, adjuk meg a metszéspontjukat.
$e:\ x = 3+4t,\ y = 2t,\ z = -1-2t;$ $\qquad f:\ x-2 = z+1,\ y = 2;$
$g:\ \frac{x+1}{2} = y+2 = 1-z;$ $\qquad h:\ x = 2+t,\ y = -1,\ z = 1+t.$

Megoldások: Az paraméteres egyenletrendszerek és irányvektorok:

- $e:\ x = 3+4t,\ y = 2t,\ z = -1-2t \Longrightarrow \underline{v}_e = (4,2,-2)$
- $f:\ x-2 = z+1,\ y = 2 \Longrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{z+1}{1},\ y = 2\ (\Longrightarrow x = 2+t,\ y = 2,\ z = -1+t) \Longrightarrow \underline{v}_f = (1,0,1)$
- $g:\ \frac{x+1}{2} = y+2 = 1-z \Longrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}\ (\Longrightarrow x = -1+2t,\ y = -2+t,\ z = 1-t) \Longrightarrow$ $\underline{v}_g = (2,1,-1)$
- $h:\ x = 2+t,\ y = -1,\ z = 1+t \Longrightarrow \underline{v}_e = (1,0,1)$

Vizsgáljuk páronként az egyeneseket:

- e és f - Nem párhuzamosak, mert irányvektoraik nem azok. Metszéspont keresése (új paraméter f-ben, és az egyes részeket egyenlővé tesszük):
$$\begin{aligned} 3+4t &= 2+s \\ 2t &= 2 \\ -1-2t &= -1+s \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \text{ nincs megoldás } \Longrightarrow \text{ kitérő egyenesek}$$
- e és g - $\underline{v}_e = 2\underline{v}_g \Longrightarrow$ párhuzamosak és azonosak, mert a $(3,0,-1)$ pont mindkettőn rajta van (e-nél $t = 0$-hoz, g-nél $t = 2$-höz tartozik).
- e és h - Nem párhuzamosak, mert irányvektoraik nem azok. Metszéspont keresése (új paraméter h-ban, és az egyes részeket egyenlővé tesszük):
$$\begin{aligned} 3+4t &= 2+s \\ 2t &= -1 \\ -1-2t &= 1+s \end{aligned} \qquad \Longrightarrow t = -\frac{1}{2}, s = -1 \Longrightarrow (1,-1,0) \text{ a metszéspont, tehát metszőek}$$
- f és g - Ugyanaz, mint f és e (hisz e és g azonosak).
- f és h - $\underline{v}_f = \underline{v}_h \Longrightarrow$ párhuzamosak, de nem azonosak, mert a $(2,2,-1)$ pont rajta van f-en ($t = 0$-hoz tartozik), de nincs rajta h-n (nincs megfelelő paraméter).
- g és h - Ugyanaz, mint e és h (hisz e és g azonosak).

5. (*) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (paraméteres vagy paramétermentes), amely átmegy a $P(-1,2,-3)$ ponton, merőleges az $\underline{a} = (6,-2,-3)$ vektorra, és metszi az $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{5}$ egyenletrendszerű egyenest!

Megoldások: A megadott egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = 1+3t,\ y = -1+2t,\ z = 3-5t$. A t paraméterű általános pontot jelölje Q_t. Q_t pontosan akkor lehet a felírandó egyenessel vett metszéspont, ha a $\overrightarrow{PQ_t}$ és $\underline{a}$ vektorok merőlegesek $\Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ_t} \cdot \underline{a} = 0 \Longleftrightarrow$

$$(1+3t-(-1), -1+2t-2, 3-5t-(-3)) \cdot (6,-2,-3) = 0 \iff (2+3t, -3+2t, 6-5t) \cdot (6,-2,-3) = 0$$

$$\iff 6(2+3t) - 2(-3+2t) - 3(6-5t) = 0 \iff 12 + 18t + 6 - 4t - 18 + 15t = 0$$

$$\iff t = 0 \implies Q(1,-1,3)$$

A felírandó egyenes egy pontja pl. $P(-1,2,-3)$ és irányvektora $\underline{v} = \overrightarrow{PQ} = (2,-3,6)$, így paraméteres egyenletrendszere $x = -1+2t,\ y = 2-3t,\ z = -3+6t$.

6. (*) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (paraméteres vagy paramétermentes), ha van ilyen, amely merőleges a $2x+4y-z+5=0$ egyenletű síkra és metszi a következő egyenletrendszerű egyeneseket:

$$e:\ \frac{x}{2}=-y=z,\quad f:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{3}.$$

Megoldások: A felírandó egyenes merőleges kell hogy legyen a megadott síkra, így irányvektora megegyezik annak normálvektorával, vagyis $\underline{v}=\underline{n}=(2,4,-1)$. Az e egyenes paraméteres egyenletrendszere $x=2t,\ y=-t,\ z=t$, általános pontját jelölje P_t. Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere $x=2+3s,\ y=1+5s,\ z=3s$, általános pontját jelölje Q_s. P_t és Q_s akkor lehetnek a felírandó egyenessel vett metszéspontok, ha a $\overrightarrow{P_tQ_s}=(2+3s-2t,1+5s+t,3s-t)$ vektor párhuzamos a $\underline{v}=(2,4,-1)$ vektorral $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{P_tQ_s}$ és $\underline{v}$ egymás számszorosai $\Longleftrightarrow \exists c\neq 0$, hogy $2+3s-2t=2c,\ 1+5s+t=4c,\ 3s-t=-c$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $s=\frac{2}{41}$, $t=\frac{25}{41}$ és $c=\frac{19}{41}$. $\Longrightarrow$ A keresett egy pontja pl. $Q_{\frac{2}{41}}=(\frac{88}{41},\frac{51}{41},\frac{6}{41})$ és irányvektora $\underline{v}=(2,4,-1)$, így paraméteres egyenletrendszere $x=\frac{88}{41}+2t,\ y=\frac{51}{41}+4t,\ z=\frac{6}{41}-t$.

7. (Gy) Határozzuk meg a megadot sík és egyenes közös pontját, ha van ilyen!
   a) $e: x=3-t, y=2-t, z=3-t,\ \mathcal{S}: -2x+y+3z-3=0$
   b) $e: x+2=y-3=\frac{z+1}{3},\ \mathcal{S}: x+2y-z+2=0$

Megoldások:

a) "Helyettesítsük e-t $\mathcal{S}$-be:" $-2(3-t)+(2-t)+3(3-t)=0\Longrightarrow -2t+5=0\Longrightarrow t=\frac{5}{2}\Longrightarrow$ A metszéspont koordinátái: $x=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$, $y=2-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$, $z=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\Longrightarrow(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

b) e paraméteres egyenletrendszere: $x=-2+t$, $y=3+t$, $z=-1+3t$. "Helyettesítsük e-t $\mathcal{S}$-be:" $(-2+t)+2(3+t)-(-1+3t)+2=0\Longrightarrow 7=0\Longrightarrow$ Nincs megoldás, tehát nincs metszéspont.

8. (Gy) Mely pontban döfi a $P(1,1,0)$ és a $Q(3,1,2)$ pontokat összekötő egyenes a $S(2,1,3)$ ponton átmenő $\mathbf{n}(1,1,1)$ normálvektorú síkot?

Megoldások: A P és Q pontokon átmenő egyenes irányvektora $\overrightarrow{PQ}=(2,0,2)$, így paraméteres egyenletrendszere (pontnak a P pontot használva) e: $x=1+2t$, $y=1$, $z=2t$. A sík egyenlete $\mathcal{S}$: $1(x-2)+1(y-2)+1(z-3)=0\Longrightarrow x+y+z=7$. "Helyettesítsük e-t $\mathcal{S}$-be:" $(1+2t)+1+2t=7\Longrightarrow 4t=5\Longrightarrow t=\frac{5}{5}\Longrightarrow$ A metszéspont koordinátái: $x=1+2\frac{5}{4}=\frac{7}{2}$, $y=1$, $z=2\frac{5}{4}=\frac{5}{2}\Longrightarrow(\frac{7}{2},1,\frac{5}{2})$.

9. (Gy) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2,1,-1)$ ponton és merőleges a $2x+y-z=3$, $x+2y+z=2$ síkok metszésvonalára!

Megoldások: Ha a sík merőleges a két megadott sík metszésvonalára, akkor normálvektora épp a két sík normálvaktorának vektoriális szorzata:

$$\underline{n}=\underline{n}_1\times\underline{n}_2=(2,1,-1)\times(1,2,1)=(3,-3,3)\ \Longrightarrow\ (1,-1,1).$$

Így a sík egyenlete: $1(x-2)-1(y-1)+1(z+1)=0\Longrightarrow x-y+z=0$.

10. (Gy) Határozzuk meg az alábbi alakzatok távolságát:
    a) $(0,0,12)$ pont és az $x=4t$, $y=-t$,$z=2t$ egyenes
    b) $(0,-1,0)$ pont és a $2x+y+2z=4$ sík
    c) $x=2+t$, $y=3t+2$, $z=4t+3$ és $x=1-s$, $y=3+s$, $z=2+2s$ egyenesek

Megoldások:

a) A sík irányvektora $\underline{v}=(4,-1,2)$ és átmegy az origón (O). A megadott $(0,0,12)$ pont legyen P. P távolsága az egyenestől nem más, mint az $\overrightarrow{OP}=(0,0,12)$ vektor $\underline{v}$-re merőleges komponensének hossza:

$$\overrightarrow{OP}_{\underline{v}\perp}=\overrightarrow{OP}-\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\underline{v}}{\underline{v}\cdot\underline{v}}\underline{v}=(0,0,12)-\frac{(0,0,12)\cdot(4,-1,2)}{(4,-1,2)\cdot(4,-1,2)}(4,-1,2))=(0,0,12)-\frac{24}{21}(4,-1,2)=$$

$$=\left(-\frac{32}{7},\frac{8}{7},\frac{68}{7}\right)\ \Longrightarrow\ d=\left|\left(-\frac{32}{7},\frac{8}{7},\frac{68}{7}\right)\right|=\frac{4}{7}|(-8,2,17)|=\frac{4}{7}\sqrt{8^2+2^2+17^2}=\frac{4}{7}\sqrt{357}.$$

b) A sík normálvektora $\underline{n}=(2,1,2)$, így normálegyenlete $\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}(2x+y+2z-4)=0\Longrightarrow$ $\frac{1}{3}(2x+y+2z-4)=0$, így a megadott pont távolsága a síktól $d=\left|\frac{1}{3}(2\cdot 0+(-1)+2\cdot 0-4)\right|=\frac{5}{3}$.

c) Az első egyenes irányvektora $\underline{v}_1 = (1,3,4)$ és egy pontja $P(2,2,3)$. A második egyenes irányvektora $\underline{v}_2 = (-1,1,2)$ és egy pontja $Q(1,3,2)$. A két egyenes távolsága nem más, mint a $\overrightarrow{PQ} = (-1,1,-1)$ vektor $\underline{v}\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$-vel (vagy számszorosával) párhuzamos komponensének hossza.

$$\underline{v}\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = (1,3,4) \times (-1,1,2) = (2,-6,4) \Longrightarrow (1,-3,2)$$

$$\overrightarrow{PQ}_{\underline{v}\|} = \frac{(-1,1,-1)\cdot(1,-3,2)}{(1,-3,2)\cdot(1,-3,2)}(1,-3,2) = \frac{-6}{14}(1,-3,2) = \frac{-3}{7}(1,-3,2)$$

$$d = \frac{3}{7}|(1,-3,2)| = \frac{3}{7}\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2} = \frac{3}{7}\sqrt{14} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

11. (Gy) Határozzuk meg az $x + y = 1$ és $2x + y - 2z = 2$ síkok szögét!

Megoldások: A két sík szöge megegyezik a normálvektoraik, vagyis a $\underline{v}_1 = (1,1,0)$ és $\underline{v}_2 = (2,1,-2)$ vektorok szögével.

$$\cos\sphericalangle(\underline{v}_1,\underline{v}_2) = \frac{\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2}{|\underline{v}_1|\cdot|\underline{v}_2|} = \frac{(1,1,0)\cdot(2,1,-2)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{2^2+1^2+(-2^2)}} = \frac{3}{\sqrt{23}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \sphericalangle(\underline{v}_1,\underline{v}_2) = \frac{\pi}{4}(45^\circ)$$

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok