2. feladatsor - Megoldások
Matematika A1

1. Egy egységélű kocka alaplapja $ABCD$ fedőlapja pedig $A_1B_1C_1D_1$, ahol az egyes csúcsok az alap azonos betűvel jelzett csúcsa fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezéseket (ahol az eredmény vektor, azt a kocka valamely két csúcsát összekötő vektorként adjuk meg).
   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{C_1B}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_1}$
   d) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB}|$ e) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{D_1A}$

   Megoldás:
   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1}$
   b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{C_1B} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}) + (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1B}) = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$
   c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° = 1$
   d) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD_1}$ merőleges az $\overrightarrow{AB}$ vektorra, így összegük hossza a Pithagorasz-tétel szerint
   $$\sqrt{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD_1}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{(1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 90°)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
   e) Az ACD_1 háromszög minden oldala $\sqrt{2}$ hosszú, tehát a háromszög szabályos, és így $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD_1}$ szöge 60°, az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{D_1A}$ szöge pedig 120°. Tehát $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{D_1A} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 120° = -1$.

2. Igaz-e, hogy ha $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{c}$, és $\underline{c} \neq \underline{0}$, akkor $\underline{a} = \underline{b}$?

   Megoldás: Nem igaz. Legyen például $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két azonos hosszúságú, de nem párhuzamos vektor, és $\underline{c}$ merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ síkjára. Ekkor $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{c}$, de $\underline{a} \neq \underline{b}$.

3. Egyszerűsítsük a következő szorzatokat:
   a) $(\underline{a} + \underline{b})(\underline{a} - \underline{b})$ b) $(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b})$
   c) $(\underline{a} + \underline{b})\underline{a}(\underline{b} + \underline{c})$ vegyesszorzat

   Megoldás:
   a) $(\underline{a} + \underline{b})(\underline{a} - \underline{b}) = \underline{a}^2 - \underline{a}\underline{b} + \underline{b}\underline{a} - \underline{b}^2 = \underline{a}^2 - \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{b} - \underline{b}^2 = |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2$.
   b) $(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b}) = \underline{a} \times \underline{a} - \underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{a} - \underline{b} \times \underline{b} = \underline{0} - \underline{a} \times \underline{b} - \underline{a} \times \underline{b} - \underline{0} = -2\underline{a} \times \underline{b}$
   c) $(\underline{a} + \underline{b})\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{a}\underline{c} + \underline{b}\underline{a}\underline{b} + \underline{b}\underline{a}\underline{c} = 0 + 0 + 0 + \underline{b}\underline{a}\underline{c} = \underline{b}\underline{a}\underline{c}$, mert egy síkban levő vektorok vegyesszorzata 0.

4. (*) Ha $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ egységvektorok, és $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = \underline{0}$, akkor mennyi $\underline{e}_1\underline{e}_2 + \underline{e}_1\underline{e}_3 + \underline{e}_2\underline{e}_3$?

   Megoldás: $0 = (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)^2 = \underline{e}_1^2 + \underline{e}_2^2 + \underline{e}_3^2 + 2(\underline{e}_1\underline{e}_2 + \underline{e}_1\underline{e}_3 + \underline{e}_2\underline{e}_3) = 3 + 2(\underline{e}_1\underline{e}_2 + \underline{e}_1\underline{e}_3 + \underline{e}_2\underline{e}_3)$, így $\underline{e}_1\underline{e}_2 + \underline{e}_1\underline{e}_3 + \underline{e}_2\underline{e}_3 = -\frac{3}{2}$.
   Vagy geometriailag: a három vektor egy egység oldalú szabályos háromszöget alkot, amelynek az oldalai egy adott körüljárás szerint vannak irányítva, tehát bármely két egymást követő vektor szöge 120°, skalárszorzata pedig $-\frac{1}{2}$, így a keresett kifejezés $-\frac{3}{2}$.

5. (*) Bizonyítsuk be, hogy $((\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\underline{a}$ párhuzamos $\underline{b}$-vel vagy $\underline{a}$ merőleges $\underline{b}$-re. (Úgy tekintjük, hogy a $\underline{0}$ vektor mindennel párhuzamos és mindenre merőleges.)

   Megoldás: Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ párhuzamosak, akkor már az első vektoriális szorzat $\underline{0}$, ha merőlegesek (és egyik sem $\underline{0}$), akkor $\underline{a} \times \underline{b}$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ síkjának normálvektora, és $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a}$ ebben a síkban $\underline{a}$-ra merőleges vektor, tehát $\underline{b}$-vel párhuzamos, és így $((\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a}) \times \underline{b} = 0$.
   Fordítva, tegyük fel, hogy teljesül az egyenlőség, és feltehetjük, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem $\underline{0}$. Ha $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, akkor $\underline{a}$ párhuzamos $\underline{b}$-vel. Ha ez nem $\underline{0}$, de $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a}$ igen, akkor $\underline{a}$ párhuzamos a $\underline{b}$-re merőleges nem nulla $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorral, tehát $\underline{a}$ merőleges $\underline{b}$-re. Végül ha ez a szorzat sem $\underline{0}$, akkor $\underline{b}$ párhuzamos az $\underline{a}$-ra merőleges nem nulla $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a}$ vektorral, így $\underline{b}$ merőleges $\underline{a}$-ra.

6. (Gy) Legyen $\underline{u} = (1, 2, 1)$, $\underline{v} = (0, 1, -1)$ és $\underline{w} = (1, 0, 0)$. Számítsuk ki a következő kifejezéseket:
   a) $\underline{uv}$ b) $\underline{u} \times \underline{v}$ c) $\underline{uvw}$
   d) $(\underline{uv})\underline{w}$ e) $(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w}$
   Keressünk $\underline{u}$, $\underline{v}$-hez olyan vektort, amely mindkettőre merőleges.

   Megoldás:

a) $\underline{u}\underline{v} = (1,2,1)(0,1,-1) = 0+2-1 = 1$

b) $\underline{u} \times \underline{v} = (1,2,1) \times (0,1,-1) = (-3,1,1)$

c) $\underline{u}\underline{v}\underline{w} = (\underline{u} \times \underline{v})\underline{w} = (-3,1,1)(1,0,0) = -3+0+0 = -3$

d) $(\underline{u}\underline{v})\underline{w} = 1 \cdot \underline{w} = (1,0,0)$

e) $(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w} = (-3,1,1) \times (1,0,0) = (0,1,-1)$.

Mindnekttőre merőleges vektor: $\underline{u} \times \underline{v} = (-3,1,1)$ ilyen, továbbá ennek bármely skalárszorosa is.

7. (Gy) Számítsuk ki az $\underline{a} = (1,1,0)$ vektor vetületét a $\underline{b} = (0,1,-1)$ vektorra! Állítsuk elő az $\underline{a}$ vektort egy $\underline{b}$ vektorra merőleges és egy $\underline{b}$ vektorral párhuzamos vektor összegeként!

Megoldás: A vetület $\underline{a}' = \dfrac{\underline{a}\underline{b}}{|\underline{b}|^2}\underline{b} = \frac{1}{2}(0,1,-1) = (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, és $\underline{a}-\underline{a}' = (1,1,0)-(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a kiegészítő vektor: $(1,1,0) = (0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}) + (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

8. a) (Gy) Mekkora a $(2,-1)$ és $(-1,3)$ vektorok szöge?

b) (Gy) Milyen t értékre lesz az $(1,t,1)$ és $(t,-1,1)$ vektorok szöge $60°$?

c) Tegyük fel, hogy $|\underline{a}| = |\underline{b}|$, és $|\underline{a}+\underline{b}| = |\underline{a}-2\underline{b}|$. Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge?

Megoldás:

a) A két vektor szögének koszinusza $\dfrac{(2,-1)(-1,3)}{|(2,-1)|\cdot|(-1,3)|} = \frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, így a vektorok szöge $120°$.

b) Ha φ a két vektor szöge, akkor $\cos\varphi = (1,t,1)(t,-1,1)/(|(1,t,1)|\cdot|(t,-1,1)|) = 1/(t^2+2)$. Akkor lesz $\varphi = 60°$, ha $1/(t^2+2) = 1/2$, azaz $t = 0$.

c) A feltételből következik, hogy $(\underline{a}+\underline{b})^2 = (\underline{a}-2\underline{b})^2$, azaz $\underline{a}^2+\underline{b}^2+2\underline{a}\underline{b} = \underline{a}^2+4\underline{b}^2-4\underline{a}\underline{b}$. Ebből $6\underline{a}\underline{b} = 3\underline{b}^2$, és a két vektor szögének koszinusza $\underline{a}\underline{b}/(|\underline{a}||\underline{b}|) = \underline{a}\underline{b}/|\underline{b}|^2 = \frac{1}{2}$. Tehát a két vektor szöge $60°$.

9. (Gy) Mekkora az $(1,0,-1)$, $(2,2,3)$, $(0,1,0)$ és $(1,2,1)$ csúcsok által meghatározott tetraéder térfogata?

Megoldás: Az $(1,0,-1)$ csúcsból kiinduló élvektorok $(1,2,4)$, $(-1,1,1)$ és $(0,2,2)$, az ezek által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata $(1,2,4)\times(-1,1,1))\cdot(0,2,2) = (-2,-5,3)\cdot(0,2,2) = -4$, a tetraéder térfogata pedig a paralelepipedon térfogatának hatodrésze, vagyis $\frac{4}{6} = \frac{2}{3s}$.

10. (Gy) Lineárisan összefüggők-e, illetve a t milyen értékére lineárisan összefüggők az alábbi vektorrendszerek?

a) $(1,1,0),(2,2,0),(0,1,2)$

b) $(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)$

c) $(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$

d) $(2,t,1),(4,3t,2)$

e) $(1,2,t),(0,t,-1),(1,0,3)$

Megoldás:

a) Összefüggők, mert a második vektor kétszerese az elsőnek (vagy: $2\cdot\underline{v}_1 - 1\cdot\underline{v}_2 + 0\cdot\underline{v}_3 = \underline{0}$ nem triviális lineáris kombináció, ami a $\underline{0}$ vektort adja).

b) Összefüggők, mert a harmadik vektor az első kettőnek az összege.

c) Függetlenek: ha $x(1,0,0)+y(1,1,0)+z(1,1,1) = (0,0,0)$, akkor $(x+y+z,y+z,z) = (0,0,0)$, és így $z=0$, $y=0$ és $x=0$. (Vagy: $\mathbb{R}^3$ három nem egy síkban fekvő vektora mindig független.)

d) Két vektor csak akkor lehet összefüggő, ha valamelyik a másiknak skalárszorosa, s mivel egyik vektor sem $\underline{0}$, ez a skalár nem 0, és így bármelyik vektor a másik skalárszorosa. Legyen $(4,3t,2) = \lambda(2,t,1)$. Az első komponens miatt $\lambda = 2$, és így $3t = 2t$, azaz $t = 0$. Ebben az esetben pedig valóban összefüggők: $(4,0,2) = 2(2,0,1)$.

e) $\mathbb{R}^3$-ben három vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak, azaz a vegyes szorzatuk 0. Ennek a három vektornak a vegyes szorzata $-t^2+3t-2$, és ez $t=1$ és $t=2$ esetén 0.

11. Írjuk föl, az $(1,2,3)$ vektort a 10.c) feladat vektorainak lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!

Megoldás: $(1,2,3) = x(1,0,0)+y(1,1,0)+z(1,1,1) = (x+y+z,y+z,z)$, ebből $z=3$, $y=2-z=-1$, és $x = 1-y-z = -1$, azaz $(1,2,3) = -(1,0,0)-(1,1,0)+3(1,1,1)$.

12. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan függetlenek-e az $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$ és $\underline{c}+\underline{a}$ vektorok?

    Megoldás: Tegyük fel, hogy valamely x, y, z skalárokra $x(\underline{\mathrm{a}}+\underline{\mathrm{b}})+y(\underline{\mathrm{b}}+\underline{\mathrm{c}})+z(\underline{\mathrm{c}}+\underline{\mathrm{a}})=\underline{0}$. Az $\underline{\mathrm{a}}$, $\underline{\mathrm{b}}$, $\underline{\mathrm{c}}$ vektorok szerint rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy $(x+z)\underline{\mathrm{a}}+(x+y)\underline{\mathrm{b}}+(y+z)\underline{\mathrm{c}}=\underline{0}$. Az $\underline{\mathrm{a}}$, $\underline{\mathrm{b}}$, $\underline{\mathrm{c}}$ vektorok függetlenségéből következik, hogy $x+z=x+y=y+z=0$, és könnyen látható, hogy ennek csak $x=y=z=0$ a megoldása, így $\underline{\mathrm{a}}+\underline{\mathrm{b}}$, $\underline{\mathrm{b}}+\underline{\mathrm{c}}$ és $\underline{\mathrm{c}}+\underline{\mathrm{a}}$ is lineárisan függetlenek.

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok