2. gyakorlat
Matematika A1

1. Egy egységélű kocka alaplapja $ABCD$ fedőlapja pedig $A_1B_1C_1D_1$, ahol az egyes csúcsok az alap azonos betűvel jelzett csúcsa fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezéseket (ahol az eredmény vektor, azt a kocka valamely két csúcsát összekötő vektorként adjuk meg).
   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{C_1B}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_1}$
   d) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB}|$ e) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{D_1A}$

2. Igaz-e, hogy ha $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, és $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?

3. Egyszerűsítsük a következő szorzatokat:
   a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
   c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ vegyesszorzat

4. (*) Ha $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektorok, és $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, akkor mennyi $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$?

5. (*) Bizonyítsuk be, hogy $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{a}$ párhuzamos $\mathbf{b}$-vel vagy $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re. (Úgy tekintjük, hogy a $\mathbf{0}$ vektor mindennel párhuzamos és mindenre merőleges.)

6. (Gy) Legyen $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ és $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$. Számítsuk ki a következő kifejezéseket:
   a) $\mathbf{uv}$ b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ c) $\mathbf{uvw}$
   d) $(\mathbf{uv})\mathbf{w}$ e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
   Keressünk $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$-hez olyan vektort, amely mindkettőre merőleges.

7. (Gy) Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ vektor vetületét a $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$ vektorra! Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort egy $\mathbf{b}$ vektorra merőleges és egy $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos vektor összegeként!

8. a) (Gy) Mekkora a $(2, -1)$ és $(-1, 3)$ vektorok szöge?
   b) (Gy) Milyen t értékre lesz az $(1, t, 1)$ és $(t, -1, 1)$ vektorok szöge $60°$?
   c) Tegyük fel, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, és $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge?

9. (Gy) Mekkora az $(1, 0, -1)$, $(2, 2, 3)$, $(0, 1, 0)$ és $(1, 2, 1)$ csúcsok által meghatározott tetraéder térfogata?

10. (Gy) Lineárisan összefüggők-e, illetve a t milyen értékére lineárisan összefüggők az alábbi vektorrendszerek?
    a) $(1, 1, 0), (2, 2, 0), (0, 1, 2)$ b) $(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$
    c) $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ d) $(2, t, 1), (4, 3t, 2)$
    e) $(1, 2, t), (0, t, -1), (1, 0, 3)$

11. Írjuk föl, az $(1, 2, 3)$ vektort a 10.c) feladat vektorainak lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!

12. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ vektorok?

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok