

BME KJK Matematika A1a Analízis, 1. ZH - Megoldás
2015. október 21.

1. Bizonyítsa be az alábbi logikai és halmazelméleti azonosságokat!

- a) $\neg(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \equiv Q \vee \neg P$ (igazságtáblával)
 b) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ (igazságtáblával vagy halmazelméleti azonosságokkal)

Megoldás:

a)

\neg	(P	\wedge	\neg	Q)	\vee	(P	\wedge	Q)	\equiv	Q	\vee	\neg	P
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	✓	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	✓	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	✓	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	✓	1	1	0	1

b)

A	\	(A	\	B)	=	A	\cap	B
0	0	0	0	0	0	0	✓	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	✓	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	✓	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	✓	1	1	1

Megj.: előfeldolgozásként akár át is lehet írni a halmazelméleti műveleteket logikaira, és akkor a $A \wedge \neg(A \wedge \neg B) \equiv A \wedge B$ azonosságra jutunk, ezt kell belátni.

Halmazelméleti azonosságokkal: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{A \setminus B} = A \cap \overline{(\overline{A} \cup B)} = A \cap (\overline{\overline{A} \cup B}) = (A \cap \overline{\overline{A}}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$.

2. Legyenek $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, 2, -1)$ egy paralelepipedon (egy csúcsból kiinduló) élvektorai. Határozzuk meg a paralelepipedon térfogatát, és a(z ugyanebből a csúcsból induló) testátlójának az \mathbf{a} vektorral bezárt szögét!

Megoldás: A paralelepipedon térfogata:

$$V = |\underline{\mathbf{abc}}| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |((1, 2, 0) \times (1, -1, 1)) \cdot (-3, 2, -1)| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-3, 2, -1) \right| =$$

$$|(2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) \cdot (-3, 2, -1)| = |(2, -1, -3) \cdot (-3, 2, -1)| = |-6 - 2 + 3| = |-5| = 5.$$

A paralelepipedon testátlója $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (-1, 3, 0)$. A keresett szög koszinusza:

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}|} = \frac{(1, 2, 0) \cdot (-1, 3, 0)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{-1 + 6 + 0}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \angle(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \frac{\pi}{4} \text{ (45°)}.$$

3. Mennyi a távolsága a $P(1, 2, 3)$ pontnak attól a síktól, amely átmegy az $A(3, 0, 3)$ és $B(1, 2, 4)$ pontokon és párhuzamos az $e: x = 3, y = 1 + t, z = t$ egyenessel?

Megoldás: Jelölje \mathcal{S} a szóban forgó síkot. Ekkor \mathcal{S} normálvektorát megkaphatjuk úgy, mint e irányvektorának és az \overrightarrow{AB} vektornak a vektoriális szorzata. Az előbbi leolvasható az egyenes paraméteres egyenletrendszeréből, $\underline{v}_e = (0, 1, 1)$, az utóbbi pedig $\overrightarrow{AB} = (1 - 3, 2 - 0, 4 - 3) = (-2, 2, 1)$, így

$$\underline{n}_{\mathcal{S}} = (0, 1, 1) \times (-2, 2, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 0, 0 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) = (-1, -2, 2).$$

\mathcal{S} egy pontja pl. A , így az egyenlete:

$$-1(x - 3) - 2(y - 0) + 2(z - 3) = 0 \implies -x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

A normálegyenlethez le kell osztani $\underline{n}_{\mathcal{S}}$ hosszával, vagyis $\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ -mal:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0,$$

így a távolság

$$d = \left| -\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 \right| = \frac{2}{3}.$$

4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^6 - \frac{8+8i}{1-i}z^3 - 16 = 0$ egyenletet!

Megoldás: $\frac{8+8i}{1-i} = \frac{(8+8i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{16i}{2} = 8i$, így az egyenlet

$$z^6 - 8iz^3 - 16 = 0.$$

$y = z^3$ helyettesítés után y -ban másodfokú egyenlethez jutunk, aminek megoldása:

$$y = \frac{8i \pm \sqrt{-64 + 64}}{2} = 4i = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\implies z = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{4} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2$$

5. Számítsuk ki az $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4}$ függvény limeszét ± 2 -ben (ha csak egyoldali van, akkor azokat is), és adjuk meg a $+\infty$ -beli ferde aszimptotájának egyenletét!

Megoldás: $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4} = \frac{2x^2(x+2)}{(x-2)(x+2)}$, így

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x-2} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{x-2} \stackrel{\frac{8}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2}{x-2} \stackrel{\frac{8}{0^-}}{=} -\infty$$

A $+\infty$ -beli ferde aszimptotához:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{x^3 - 4x} \stackrel{\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 2 = a$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x^3 + 8x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 8x}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{8}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 4$$

Tehát a $+\infty$ -beli ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x + 4$.

6. A következő rövid feladatok mindegyike 2 pontot ér:

a) Igaz-e, hogy ha az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nemnulla térvektorokra $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{c}$, akkor $\underline{b} = \underline{c}$?

b) Írjuk fel a tér két tetszőleges, a koordinátásikkal nem párhuzamos, metsző egyenesének egyenletrendszerét!

c) Írjunk fel egy olyan z komplex számot, amelyre $|z| = 2$ és $\operatorname{Re} z = 1$!

d) Adjunk meg olyan $f(x), g(x)$ függvényeket és $c \in \mathbb{R}$ értéket, melyekre $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$!

e) Létezik-e, és ha igen, akkor mivel egyenlő a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ határérték?

Megoldás:

a) Nem, pl. $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot 2\underline{j} = 0$, de $\underline{j} \neq 2\underline{j}$.

b) Pl. $e: x = 1 + 2t, y = 1 - t, z = 1 - t$ és $f: x = 1 + 2t, y = 1 + 3t, z = 1 + t$. Mindkét egyenes átmegy a $P(1, 1, 1)$ ponton és nem párhuzamosak, hisz irányvektoraik nem párhuzamosak.

c) $z = 1 + \sqrt{3}i$ vagy $z = 1 - \sqrt{3}i$.

d) Pl. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ és $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

e) $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty \implies$ A rendőrelv miatt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.