BME KJK Matematika A1a Analízis, 1. pótZH
2015. december 4.

Minden feladat 10 pontot ér, tehát összesen 60 pontot lehet szerezni. Részfeladatok esetén a pontszám egyenletesen oszlik el a részek közt. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Legyen A: igaz, B: igaz, C: hamis, D : igaz logikai értékű állítás. Határozzuk meg az alábbi állítások logikai értékét!
   a) $A \Longleftrightarrow (B \wedge \neg C)$ b) $\neg(D \vee A) \Longrightarrow B$ c) $C \vee (B \wedge (A \vee D))$
   d) $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow (C \Longrightarrow D))$ e) $(B \vee C) \wedge \neg(A \vee D)$

2. Számítsuk ki annak a tetraédernek a térfogatát, melynek csúcsai az $A(1,2,3)$, $B(2,2,4)$, $C(1,3,4)$, $D(2,3,4)$ pontok, továbbá adjuk meg a D csúcs BC élre vett merőleges vetületének a koordinátáit!

3. Hol döfi az $x-2=\frac{y}{2}=-z$ egyenletű egyenes azt a síkot, amelyik tartalmazza az $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,2,1)$ pontokat?

4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^5-2iz^3-2z=0$ egyenletet!

5. Számítsuk ki az alábbi határértékeket! a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$

6. A következő rövid feladatok mindegyike 2 pontot ér:
   a) Igaz-e a sík minden $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorára, hogy
   a1) $|\underline{a}+\underline{b}| < |\underline{a}|+|\underline{b}|$? a2) $|\underline{a}+\underline{b}| \le |\underline{a}|+|\underline{b}|$? a3) $|\underline{a}+\underline{b}| \ge |\underline{a}|+|\underline{b}|$?
   (Amelyik nem igaz, ott adjunk ellenpéldát!)
   b) Mi annak a komplex számnak az algebrai alakja, amivel vett szorzás az origó körüli $+45°$-os forgatást valósítja meg?
   c) Legyen f és g két olyan mindenhol értelmezett valós függvény, melyekre minden x esetén $f(x) < g(x)$, és mindkét függvénynek létezik $+\infty$-ben véges határétéke. Igaz-e ekkor, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$?

BME KJK Matematika A1a Analízis, 1. pótZH
2015. december 4.

Minden feladat 10 pontot ér, tehát összesen 60 pontot lehet szerezni. Részfeladatok esetén a pontszám egyenletesen oszlik el a részek közt. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Legyen A: igaz, B: igaz, C: hamis, D : igaz logikai értékű állítás. Határozzuk meg az alábbi állítások logikai értékét!
   a) $A \Longleftrightarrow (B \wedge \neg C)$ b) $\neg(D \vee A) \Longrightarrow B$ c) $C \vee (B \wedge (A \vee D))$
   d) $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow (C \Longrightarrow D))$ e) $(B \vee C) \wedge \neg(A \vee D)$

2. Számítsuk ki annak a tetraédernek a térfogatát, melynek csúcsai az $A(1,2,3)$, $B(2,2,4)$, $C(1,3,4)$, $D(2,3,4)$ pontok, továbbá adjuk meg a D csúcs BC élre vett merőleges vetületének a koordinátáit!

3. Hol döfi az $x-2=\frac{y}{2}=-z$ egyenletű egyenes azt a síkot, amelyik tartalmazza az $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,2,1)$ pontokat?

4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^5-2iz^3-2z=0$ egyenletet!

5. Számítsuk ki az alábbi határértékeket! a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$

6. A következő rövid feladatok mindegyike 2 pontot ér:
   a) Igaz-e a sík minden $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorára, hogy
   a1) $|\underline{a}+\underline{b}| < |\underline{a}|+|\underline{b}|$? a2) $|\underline{a}+\underline{b}| \le |\underline{a}|+|\underline{b}|$? a3) $|\underline{a}+\underline{b}| \ge |\underline{a}|+|\underline{b}|$?
   (Amelyik nem igaz, ott adjunk ellenpéldát!)
   b) Mi annak a komplex számnak az algebrai alakja, amivel vett szorzás az origó körüli $+45°$-os forgatást valósítja meg?
   c) Legyen f és g két olyan mindenhol értelmezett valós függvény, melyekre minden x esetén $f(x) < g(x)$, és mindkét függvénynek létezik $+\infty$-ben véges határétéke. Igaz-e ekkor, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$?