

A1 Gyakorlat

Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

11. hét - Integrálszámítás alkalmazásai

Elmélet:

Az $f(x)$ és $g(x)$ grafikonok által közrezárt síkidom területe: $\int_a^b f(x) - g(x) dx$, ahol $f(a) = g(a)$ és $f(b) = g(b)$

Az $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ paraméteres görbedarab alatti terület nagysága: $\int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt$

Az $r(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$ polárkoordinátás megadású görbe által határolt szektortartomány területe: $\int_a^b \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$

Az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ grafikondarab ívhossza: $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Az $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ paraméteres görbedarab ívhossza: $\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$

Az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ grafikondarab megforgatásával keletkezett forgástest térfogata: $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$

Az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ grafikondarab megforgatásával keletkezett forgástest felszíne: $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Feladatok:

1. Feladat. Számítsuk ki a megadott görbék által határolt síkidomok területét:

- $f(x) = 4 - x^2$ parabola és az x -tegely
- $f(x) = x^2 + 1$ parabola, az y -tegely és az $y = 2x + 1$ egyenes
- $f(x) = 1/x$ hiperbola és az $y = -x + 5/2$ egyenes
- $f(x) = \sqrt{x}$ függvény, az y -tegely és a függvény $x_0 = 8$ pontjába húzott érintőegyenes

2. Feladat. Számítsuk ki a paraméteres görbe adott darabja alatti területet:

- $(2 \cos(t), 2 \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$ 2 sugarú félkör
- $(t^2, (1 - t)^2)$, $t \in [0, 1]$ görbe
- $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$ ciklois
- $(\cos(t) + \cos^2(t), \sin(t)(1 + \cos(t)))$, $t \in [0, 2\pi]$ kardioid

3. Feladat. Számítsuk ki a polárkoordinátás megadású görbe által határolt szektortartomány területét:

- $r = 2$, $\varphi \in [0, \pi]$ 2 sugarú félkör
- $r = \frac{1}{1 + \varphi}$, $\varphi \in [0, 2]$ görbe
- $r = \varphi^2$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ spirál
- $r = 1 + \cos(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ kardioid

4. Feladat. Számítsuk ki a megadott görbedarabok ívhosszát:

- $f(x) = \operatorname{ch}(x)$, $x \in [0, 2]$
- $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $x \in [0, 0.5]$
- $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in [1, 2]$
- $(2 \cos(t), 2 \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$ 2 sugarú félkör
- $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$ ciklois

f) $(e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, $t \in [0, \pi/2]$ spirál

5. Feladat. Számítsuk ki a megadott görbedarabok megforgatásából keletkezett forgástest felszínét ill. térfogatát:

a) $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$ térfogatát és felszínét

b) $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1, 2]$ térfogatát

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ felszínét

d) $f(x) = 2x$, $x \in [1, 3]$ csónkakúp felszínét és térfogatát

e) $f(x) = 1/x$, $x \in [1, \infty]$ térfogatát és felszínét