A1 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

9-10. hét - Integrálszámítás

Elmélet:

Határozatlan integrál: $\int f(x)dx = F(x) + c$ ha $F'(x) = f(x)$, akkor $F(x) + c$ primitív függvényei $f(x)$-nek.
Határozott integrál: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Linearitás: $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, $\quad \int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Parciális integrálás: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Egyszerű helyettesítés: $\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = F\left(g(x)\right) + c$, ahol $\int f(x)dx = F(x) + c$

Teljes helyettesítés: $\int f(x)dx = \int f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$, ahol $x = x(t)$ és $\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$

Alapintegrálok:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad \int \frac{1}{x} = \ln|x| + c, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} = \mathrm{arctg}(x) + c$$

$$\int \sin(x)dx = \cos(x) + c, \qquad \int \cos(x)dx = -\sin(x) + c, \qquad \int \mathrm{sh}(x)dx = \mathrm{ch}(x) + c, \qquad \int \mathrm{ch}(x)dx = \mathrm{sh}(x) + c$$

Improprius integrálok:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega -> \infty} \int_a^\omega f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \text{ ha } \lim_{x \to b-} f(x) = \pm\infty$$

Feladatok:

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

$a)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$	$b)\ \int \frac{4+7x+x^4+\sqrt{x}}{x^2}dx$	$c)\ \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}$
$d)\ \int \frac{\ln(2)}{\sqrt{2-2x^2}}dx$	$e)\ \int \mathrm{tg}^2(x)dx$	$f)\ \int_0^\pi \sin(x)dx$
$g)\ \int_0^1 e^{-2x}dx$	$h)\ \int \frac{3}{1-5x}dx$	$i)\ \int \frac{x}{x^2+1}dx$
$j)\ \int \sin(2x)dx$	$k)\ \int \sin^2(x)dx$	$l)\ \int \sin^4(x)dx$
$m)\ \int \cos^3(x)dx$	$n)\ \int_{-1}^1 \mathrm{sh}^3(x)dx$	$o)\ \int \frac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}(x)}}dx$
$p)\ \int_0^{\pi/6} \cos(3x)dx$	$q)\ \int \sin(x)\cos(2x)dx$	$r)\ \int \ln(x)dx$

s) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x + e^x dx$ t) $\displaystyle\int e^x \mathrm{sh}(x)dx$ u) $\displaystyle\int \ln^2(x)dx$

v) $\displaystyle\int \arcsin(x)dx$ w) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}dx$ x) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$

y) $\displaystyle\int \sqrt{3+2x+x^2}dx$ z) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ zz) $\displaystyle\int \frac{1}{cos(x)}dx$

2. Feladat. A parciális törtekre bontás módszerével végezzük el az alábbi integrálszámításokat:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^3-x}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x-1)}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{-3x-4}{(x-2)(x^2+1)}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+2}dx$ h) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)-2}dx$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2x^3}dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4x+3}dx$ e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}^2 dxdx$ h) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx$