A1 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

7-8. hét - Differenciálszámítás alkalmazásai

Elmélet:

Ha $f'(x) > 0 (< 0)\, \forall x \in [a, b]$, akkor $f(x)$ szig.mon.nő(csökken) $[a, b]$-n.
Ha $f'(x_0) = 0$ ÉS $f'(x)$ az x_0-nál előjelent vált, akkor $f(x)$-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban.
x_0 minimumhely, ha $f'(x)$ negatívból pozitívba vált ($f''(x_0) > 0$)
x_0 maximumhely, ha $f'(x)$ pozitívból negatívba vált ($f''(x_0) < 0$)

Ha $f''(x) > 0 (< 0)\, \forall x \in [a, b]$, akkor $f(x)$ konvex(konkáv) $[a, b]$-n.
Ha $f''(x_0) = 0$ ÉS $f''(x)$ az x_0-nál előjelent vált, akkor $f(x)$-nek inflexiós pontja van x_0-ban.

Függvényvizsgálat elemei: D_f, globális tulajdonságok, határérték, folytonosság, aszimptoták, monotonitás, szélsőértékek, konvexitás, inflexiós pontok, grafikon, R_f

Az f függvény n-ed fokú Taylor polinomja az x_0 pont körül $T_f^n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

Lagrange-féle maradéktag: $R_f^n(x, x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x)$.

Feladatok:

1. Feladat. Keressük meg az alábbi függvények szélsőértékeit, határozzuk meg mely intervallumokon monoton növekvők ill. csökkenők:

$$a)\ x^3 - 4x^2 + 4x \qquad b)\ \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x} \qquad c)\ e^x + \mathrm{sh}(x) \qquad d)\ \ln\left(\frac{x^2}{(1+x)^3}\right)$$

2. Feladat. Keressük meg az alábbi függvények inflexiós pontját, határozzuk meg hol konvexek vagy konkávak:

$$a)\ \sqrt[3]{x} \qquad b)\ x + x^{5/3} \qquad c)\ e^x + \mathrm{sh}(x) \qquad d)\ \sin^2(x)$$

3. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvények menetét:

$$a)\ x^3 - x^2 - 2x \qquad b)\ x + \frac{1}{x} \qquad c)\ \frac{6x}{x^2+3}$$

$$d)\ x^3 + \frac{1}{5x} \qquad e)\ x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 \qquad f)\ \sqrt[3]{1 - x^3}$$

$$g)\ x^2 e^{1/x} \qquad h)\ \frac{\ln(x)}{x} \qquad i)\ x^2 \ln(x^2)$$

$$j)\ x^2 e^{-x} \qquad k)\ x^x \qquad l)\ \sqrt{x} e^{1/x}$$

$$j)\ \frac{\cos(2x)}{\cos(x)} \qquad k)\ \sin(x) + \tfrac{1}{2}\sin(2x) \qquad l)\ \ln|\sin(x)|$$

4. Feladat. A biatlon verseny egy 2km széles folyó egyik partjáról indul a cél pedig a folyó túloldalán 6 km-rel lejjebb található. A start és cél között a versenyzők szabadon választhatják meg az útvonalat. Egy résztvevő tudja magáról, hogy átlagosan 10 km/óra sebességgel fut és 1km/óra gyorsasággal úszik. Hogyan válassza meg útvonalát, hogy a teljesítményét figyelembe véve a leggyorsabban jusson a célba.

5. Feladat. Egy 40cm oldalhosszúságú négyzet alakú kartonlapból felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy karton mind a négy sarkából egyforma "a" oldalhosszúságú kis négyzetet vágunk ki. Felhajtva a keletkezett füleket és a vágások mentén összeragasztva kapjuk meg a dobozunkat. Mekkora négyzetet kell a sarkokból levágni, ha maximális térfogatú dobozt szeretnénk így készíteni.

6. Feladat. Egy téglalap alakú dobozt zsineggel kötünk át. Az alapjával párhuzamosan egyszer még arra merőlegesen mindkét irányba kétszer kötjük át. Mekkorák legyenek a téglatest oldalai, ha térfogata $1\,\mathrm{dm}^3$ és a zsinegből a lehető legkevesebbet szeretnénk felhasználni.

7. Feladat. Adott sugarú körbe trapézt írunk úgy, hogy a trapéz alapja a kör egyik átmérője. Milyen nagy lehet legfeljebb az így rajzolt trapéz területe?

8. Feladat. Melyik az $1\,\mathrm{m}^3$ téfogatú hengerek közül a legkisebb felszínnel rendelkező?

9. Feladat. Egy adott rugarú félgömb fölé egyenes körkúpot állítunk, úgy hogy a kúp alapköre koncentrikus legyen a félgömb alapkörével. A gömb sugarához képest milyen méretekkel rendelkezzen a kúp, hogy térfogata a lehető legkisebb legyen.

10. Feladat. Mekkora legyen annak a hengernek az alapköre és magassága, melyet egy egységnyi sugarú gömb belsejében helyezünk el és térfogata maximális?

11. Feladat. Íjuk fel az adott függvényt adott pontban a megadott rendben érintő Taylor-polinomot:

a) $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \pi/4,$ negyed rendben

b) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0,$ harmad rendben

c) $f(x) = \operatorname{arth}(x), \quad x_0 = 0,$ ötöd rendben

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}, \quad x_0 = 1,$ negyed rendben

e) $f(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = 0,$ ötöd rendben

f) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 10,$ harmad rendben

12. Feladat. Becsüljük a függvényt a 0 körüli megadott rendű Taylor-polinomjának segítségével. Becsüljük a közelítés hibáját a megadott ponban illetve intervallumon:

a) $f(x) = \cos(x), \quad x_1 = \pi/6, \quad T_f^3(x,0)$

b) $f(x) = \ln(x), \quad x_1 = 1,3, \quad T_f^3(x,0)$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(x), \quad x_1 = 0,75, \quad T_f^3(x,0)$

d) $f(x) = e^x, \quad x_1 = -1/4, \quad T_f^4(x,0)$

e) $f(x) = \sin(x), \quad -0,5 \le x_1 \le 0,5, \quad T_f^4(x,0)$

f) $f(x) = \operatorname{sh}(x), \quad -1/3 \le x_1 \le 1/3, \quad T_f^4(x,0)$

g) $f(x) = \ln(1+x), \quad -0,1 \le x_1 \le 0,1, \quad T_f^5(x,0)$