A1 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

6-7. hét - Függvények differenciálása

Elmélet:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Az f függvény érintője az x_0 pontban $e(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Differenciálási szabályok:

$$(c\,f)')(x) = cf'(x), \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (f\,g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Feladatok:

1. Feladat. Számoljuk ki az alábbi függvényeket deriváltfüggvényét:

a) $\dfrac{1}{x^2}$ *b)* $\sqrt{x^2 - 3}$ *c)* $\dfrac{x^2 - x + 2}{x + 3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ *e)* $(x^3 - 3x)^5$ *f)* $\sin(x^2)$

g) $\dfrac{1}{\cos(x)}$ *h)* $2\sin(x)\cos(x)$ *i)* $\mathrm{arctg}(\sqrt{x})$

j) $e^{3x} + \frac{1}{e^{2x}}$ *k)* $\ln(5x - 1)$ *l)* $\lg(x/2)$

m) $\sqrt{3^x}$ *n)* $x^2 \mathrm{th}(3x)$ *o)* x^x

p) $(\sin(x))^x$ *q)* $e^{\sin(x)}$

2. Feladat. Írja fel a függvény érintőjét:

a megadott pontban:

a) $3x - x^2, \quad x_0 = 1$ *b)* $\ln(x^2 + 1), \quad x_0 = 2$ *c)* $\sin(\sqrt{x}), \quad x_0 = \pi^2$

azon pontokban, ahol az érintő párhuzamos a megadott egyenessel:

a) $x^3 - x^2 + 6x, \quad y = 6x + 1$ *b)* $\mathrm{tg}(x), \quad y = 2x - 5$ *c)* $x^3 - 4x$, y-tegellyel

azon pontokban, ahol az érintő merőleges a megadott egyenesre:

a) $3x - x^2, \quad y = 2x$ *b)* $\sin(x), \quad y = x - 1$

3. Feladat. Számítsuk ki az implicit módon adott görbék érintőjét az adott pontban:

a) $xy - y^2 - 3 = 0, \quad x_0 = 4,\ y_0 = 3$

b) $x^2 \sin(y) + y + x = 0, \quad x_0 = \pi,\ y_0 = -\pi$

c) $3y - x\sin(x+y) = 0, \quad x_0 = \pi,\ y_0 = 0$

d) $\operatorname{arctg}(y) - yx^2 = 0, \quad x_0 = \sqrt{\pi}/2,\ y_0 = 1$

4. Feladat. Számítsuk ki a paraméteresen adott görbék érintőjét az adott pontban:

a) $x(t) = t^2 - 1,\ y(t) = t^3 - 4, \quad t_0 = 2$

b) $x(t) = \operatorname{ch}(t),\ y(t) = \operatorname{sh}(t), \quad t_0 = \ln(3)$

c) $x(t) = 3\cos(t),\ y(t) = 3\sin(t), \quad t_0 = \pi/3$

d) $x(t) = 2\cos(t),\ y(t) = \sin(t), \quad t_0 = 3\pi/2$

e) $x(t) = t^2,\ y(t) = 2\cos(t), \quad t_0 = \pi$

f) $x(t) = \sin^2(t),\ y(t) = \sin(2t), \quad t_0 = \pi/6$

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket a L'Hospital szabály segítségével:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{2x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{2x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^k}{e^x}$ *e)* $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ *f)* $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{xe^{x/2}}{e^x + x}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x \ln(-x)$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg}(x)$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)^x$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ *h)* $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos(x)}{\sin(4x)}$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$