A1 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

4-5. hét - Függvények határértéke, folytonossága

Elmélet:

Az $f(x) : D_f \to R_f \subseteq \mathbb{R}$ valós függvény:
– páros, ha $\forall x \in D_f, \quad f(x) = f(-x)$
– páratlan, ha $\forall x \in D_f, \quad -f(x) = f(-x)$
– periodikus, ha $\exists p \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in D_f, \quad f(x + k \cdot p) = f(x)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$
– monotn nő/csökken $(a, b) \subseteq D_f$, ha $\forall x_1 < x_2 \in (a, b), \quad f(x_1) \leq f(x_2)/f(x_1) \geq f(x_2)$
– korlátos, ha $\exists k$(alsó korlát), és K(felső korlát) $\in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in D_f, \quad k \leq f(x) \leq K$

Az $f(x) : D_f \to R_f \subseteq \mathbb{R}$ valós függvény inverzfüggvénye $f^{-1}(y) : R_f \to D_f$, úgy hogy $f^{-1}(y) = x$, ha az $f(x) = y$.

Az $f(x) : D_f \to R_f \subseteq \mathbb{R}$ valós függvénynek x_0-ban A a határértéke, ha x_0 egy környezetében f értelmezett, és $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, ahol $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Az $f(x) : D_f \to R_f \subseteq \mathbb{R}$ valós függvény x_0-ban a végtelenbe tart, ha x_0 egy környezetében f értelmezett, és $\forall K > 0 \quad \exists \delta(K) > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta(K)$, ahol $x \neq x_0$, akkor $f(x) > K$.

Az $f(x) : D_f \to R_f \subseteq \mathbb{R}$ valós függvénynek a ∞-ben A a határértéke, ha $(a, \infty) \subset D_f$, és $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k(\varepsilon) > 0$, hogy ha $x > k(\varepsilon)$ akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Az $f(x) : D_f \to R_f \subseteq \mathbb{R}$ valós függvény a ∞-ben végtelenbe tart, ha $(a, \infty) \subset D_f$, és $\forall K > 0 \ \exists k(K) > 0$, hogy ha $x > k(K)$ akkor $f(x) > K$.

Az $f(x) : D_f \to R_f \subseteq \mathbb{R}$ valós függvény folytonos $x_0 \in D_f$, ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \quad k \in \mathbb{Q}$$

Feladatok:

1. Feladat. Állapítsa meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

a) $|x|$ *b)* $|x| - 3$ *c)* $|x| - x$

d) $|\text{sgn}(x)|$ *e)* $\frac{1}{1-\text{sgn}(x)}$ *f)* $3 \cdot [x]$ – egészrész függvény

g) $\{x - 3\}$ – törtrész függvény *h)* $x + \sqrt{x}$ *i)* $\dfrac{1}{x^2 - 1}$

j) $\frac{1}{3} \cdot \text{tg}(x - 1)$ *k)* $\ln(x^2 - 3x + 2)$ *l)* $\arcsin(x - 2)$

m) $2 \cdot \text{sh}(x + 1)$ *n)* $\arccos(3x - 1) + 2$

2. Feladat. Vizsgálja meg az alábbi függvények paritását:

a) x^3 *b)* $x^2 - x$ *c)* $x^4 + x^2 - 2$

d) $\dfrac{x^2}{x^6 - 1}$ *e)* $x^3 \cdot \cos(x)$ *f)* $\dfrac{\sin(x)}{x}$

3. Feladat. Határozza meg az alábbi függvények inverzfüggvényét:

a) $2x - 1$ *b)* $x^3 + 2$ *c)* $\dfrac{x-5}{6x}$

d) $\sqrt[3]{1 + x^2}$ *e)* $5^{x+3} - 1$ *f)* $\operatorname{sh}(x - 1)$

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi függvényhatárértékeket, ha léteznek!

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - x - 2}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 5} + \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5 + 101} - x}$ *e)* $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6}$ *f)* $\lim\limits_{x\to \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(7x)}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg}(x)$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(2x)}{3x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}(x))^{\operatorname{ctg}(x)}$ *l)* $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3x)^{1/x}$

m) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$ *n)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ *o)* $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{\sin(x)}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$ *q)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$ *r)* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

s) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{\sin(4x)}$ *t)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$ *u)* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x - x^3}{x - 3}$

5. Feladat. Állapítsa meg, hogy az alábbi függvényeknek mely pontokban van szakadási helye és ezek milyen típusúak:

a) $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$ *b)* $\dfrac{1}{\sin(3x)}$ *c)* $\dfrac{1}{x^4 + x^2 - 2}$

a) $\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ *b)* $\dfrac{1}{3^{x+1}}$ *c)* $\dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$