A1 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

3. hét - Számsorozatok

Elmélet:

"$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$" minden pozitív egész számhoz rendel egy valós számot

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az A szám: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számra létezik $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

Az $\{a_n\}$ sorozat a (mínusz) végtelenhez divergál: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (-)\infty$, ha bármely $K > (<)0$ számra létezik $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $a_n > (<)K$.

A T szám torlódási pontja az $\{a_n\}$ sorozatnak, ha van olyan $\{a_{n(k)}\}$ részsorozata $\{a_n\}$-nek, melynek határértéke T.

$\{a_n\}$ monoton növő(csökkenő), ha $\forall n < m$ esetén $a_n \leq a_m (a_n \geq a_m)$

$\{a_n\}$ szigorúan monoton növő(csökkenő), ha $\forall n < m$ esetén $a_n < a_m (a_n > a_m)$

$\{a_n\}$ felülről(alulról) korlátos, ha létezik K, hogy $\forall n$ esetén $a_n < (>)K$, $\{a_n\}$ korlátos, ha felülről és alulról is korlátos

Minden konvergens sorozat korlátos. Monoton növő(csökkenő), felülről(alulról) korlátos sorozat konvergens.

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, akkor

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, A, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$ iv) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / b_n = A/B,$ ha $b \neq 0$

Továbbá, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$

Rendőr-elv: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$ és $\forall n\ a_n \leq b_n \leq c_n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

Nevezetes sorozatok:

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ha $|q| < 1$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ ha $q > 0$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{Q}$$

$$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Feladatok:

1. Feladat. A konvergencia definíciója alapján bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok a megadott "A" számhoz konvergálnak! Hányadik elemtől kezdve lesznek a sorozat elemei a határérték ε sugarú környezetében?

a) $a_n = \dfrac{2}{(n+1)^2}$ $\quad A = 0, \quad \varepsilon = 10^{-4}$ $\qquad$ *b)* $b_n = \dfrac{3 - n^3}{5 + 2n^3}$ $\quad A = -\dfrac{1}{2}, \quad \varepsilon = 10^{-9}$

c) $c_n = 2^{\frac{1}{n}}$ $\quad A = 1, \quad \varepsilon = 0,1$ $\qquad$ *d)* $d_n = \dfrac{1}{4 \cdot 3^n - 1}$ $\quad A = 0, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

e) $e_n = \sqrt{\frac{n+4}{n}}$ $\quad A = 1, \quad \varepsilon = 0,1$ $\qquad$ *f)* $f_n = 1 + (-1)^n \dfrac{2}{3^n}$ $\quad A = 1, \quad \varepsilon = \dfrac{2}{3^{100}}$

2. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok a végtelenhez divergálnak! Hányadik elemtől kezdve lesznek a sorozat elemei a megadott K számnál nagyobbak?

a) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ $\quad K = 20$ $\qquad$ *b)* $b_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n}+1}$ $\quad K = 999$

3. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából! Határozzuk meg a konvergens sorozatok határértékét!

a) $3n$ *b)* $(-1)^n \cdot n$ *c)* $(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ *d)* $\frac{3n-1}{2n+1}$

e) $\frac{4n}{n^2+1}$ *f)* $\frac{n^2+3}{n(4n+1)}$ *g)* $\frac{3n}{\sqrt{n^2+1}}$ *h)* $\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{n+2}}$

i) $1+\frac{1}{3^n}$ *j)* $\frac{1}{4^n-1}$ *k)* $\frac{1-5^{n+2}}{5^n}$ *l)* $\frac{2^n}{3^n-1}$

m) $\frac{10^n}{n!}$ *n)* $\frac{2^n}{n^2}$ *o)* $a_1=1, \quad a_n=a_{n-1}+\frac{1}{3^n}$ *p)* $a_1=-1, \quad a_n=-4+3a_{n-1}$

4. Feladat. Állapítsuk meg a sorozatok határértékét!

a) $\frac{5n^2-3n-1}{n+3}$ *b)* $\frac{n^3-6n+1}{3n^3-n^2+4}$ *c)* $\sqrt[n]{n+3}$ *d)* $\frac{n^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{n^3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

e) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ *f)* $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ *g)* $\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ *h)* $\sqrt[n]{5n^2-30n+21}$

i) $\frac{n}{3^n}$ *j)* $\frac{\sin(n\pi)}{\sqrt{2n\pi}}$ *k)* $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ *l)* $\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$

m) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ *n)* $\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{2^n}$ *o)* $\frac{\sqrt[3]{n}-1}{\sqrt[5]{n}+1}$ *p)* $\frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt{n^2+5}}$

q) $\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{3n}+2}{\sqrt[3]{2n}+\sqrt{5n}-1}$ *r)* $\frac{2^n}{5\cdot 2^n-1}$ *s)* $\frac{2^n+3^n}{4^{n-1}}$ *t)* $\frac{2^n}{n\cdot 4^n-3}$