A1 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

2. hét - Komplex Számok

Elmélet:

$\sqrt{-1} = i, \quad i^2 = -1$

Algebrai alak: $z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad Re(z) = a,\ Im(z) = b$
hossz: $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$
konjugálás: $\overline{a + ib} = a - ib$
összeadás: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
szorzás: $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + cb)$
osztás: $\dfrac{a + ib}{c + id} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

Trigonometrikus alak: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad |z| = r,\ \arg(z) = \varphi$
szorzás: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot q(\cos\psi + i\sin\psi) = rq(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$
hatványozás: $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
osztás: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)/q(\cos\psi + i\sin\psi) = r/q(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$
gyökvonás: $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \dots n - 1$

Feladatok:

1. Feladat. Számítsuk ki és ábrázoljuk a következő komplex számokat ha $z = 2+3i$, és $v = 6-2i$,
a) $3z - 2v$ b) $z \cdot v$, c) $|v - 2z|$, d) $z \cdot \overline{z}$ e) $\dfrac{1}{i \cdot \overline{z}}$, f) $\dfrac{z - 1}{v}$, g) v^3

2. Feladat. Írjuk fel az alábbi komplex számok való és képzetes részét, hosszát és határozzuk meg argumentumát!
a) $z = 3$, b) $z = -8$, c) $z = -2i$, d) $z = -1 + i$ e) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
f) $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ g) $z = 4\sqrt{3} - 4i$

3. Feladat. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő számhalmazokat:
a) $Im(z + i) > 2$ b) $-2 \leq z + \overline{z} \leq 4$ c) $-\pi < \arg z < \pi/2$ d) $|z| < 2$ e) $|z + i| = 3$
f) $|2z + 3| > 4$ g) $|z + 2 - i| < 1$ h) $\sqrt[5]{1}$ i) $(1 + i)^n,\ n \in \mathbb{N}$ j) $\pi \leq arg(z \cdot i) \leq 2\pi$

4. Feladat. Írjuk fel trigonometrikus alakban:
a) $1 - i$ b) $-2 + 2\sqrt{3}\,i$ c) $-8 - 8i$ d) $1 - \sqrt{3}\,i$

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:
a) $(1 - i)(1 + i)$ b) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$ c) $\dfrac{1}{2i}$ d) $(2 + 2i)^5$ e) $(-3 + \sqrt{3}i)^{-4}$
f) $(1 + i)^4(1 - \sqrt{3}i)^6$ g) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{134}$

6. Feladat. Számítsuk ki az alábbi komplex számok n-edik gyökeit:
a) $z = -1$, ha $n = 2$ b) $z = 1$, ha $n = 3$ c) $z = -16i$, ha $n = 4$
d) $z = -2 + 2i$, ha $n = 3$ e) $z = \sqrt{3} - i$, ha $n = 8$

7. Feladat. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halamazán:

a) $z^3 = -8$ b) $z^3 + 4i = 0$ c) $z^2 - 4z + 9 = 0$ d) $z^2 = \dfrac{(2-i)(2+i)}{3i}$

e) $iz^4 = 2i^2 - 4i^4 + 6i^6 - 4i^8$ f) $z^4 - z^2 - 6 = 0$ g) $z^2 + 5 + \dfrac{6}{z^2} = 0$

h) $z^2 + 6\overline{z} - |z|^2 = 10$ i) $z^3 - z^2 + 17z + 87 = 0$, ha a $z = -3$ gyöke

j) $z^4 - 4z^3 + 38z^2 - 36z + 261 = 0$, ha a $z = 3i$ gyöke.

8. Feladat. Forgassuk el a $z = 2 - i$ komplex számot $60°$ fokkal és nyújtsuk a kétszeresére!

9. Feladat. Határozzuk meg azon négyzet B és D csúcsai, melynek A csúcsát a $3 + 2i$, C csúcsát pedig az $5 + 4i$ jelöli ki!

10. Feladat. Az egységnyi hosszú komplex számok és megfelelő hatványuk trigonometrikus alakjának segítségével igazoljuk a következő trigonometrikus azonosságokat:

a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ b) $\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$.

11. Feladat. Számoljuk ki az n-edik egységgyökök összegét!