A1 Gyakorlat
Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

1. hét - Halmazelmélet és Teljes indukció

Elmélet:

"A" halmaz elemszáma: $\#A$ vagy $|A|$

Halmazok műveleti azonosságai:
kommutatív: $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$;
asszociatív: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
idempotencia: $A \cap A = A$; $A \cup A = A$;
elnyelés: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$;
disztributivitás: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
$\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Hatványhalmaz: egy A halmaz összes részhalmazaiból álló halmaz (H^A vagy $P(A)$).

Logikai szita módszer: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
általánosan: $|A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$

Teljes indukció: egész számokra vonatkozó állítások bizonyítására használjuk. Igazoljuk, hogy egy kicsi egész számra teljesül. Feltesszük hogy az állítás egy "n" számra igaz. A feltevés alapján belátjuk, hogy az állítás "n+1" egészre is teljesül.

Binomiális együtthatók: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, melyre $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ és $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Feladatok:

1. Feladat. Legyenek a következő halmazok:
M={Magyarország lakói}
F={a világ férfi lakói}
B={a világ barna hajú embereit}
Fejezzük ki ezekkel a halmazokkal a következő emberek halmazát:
a) az összes külföldi, barna hajú ember
b) az összes nem barna hajú férfi
c) az összes férfi és a magyar nők halmaza
d) a barna hajú magyar férfiak
e) barna hajú magyar nők
f) a magyar nem barna hajú nők és külföldi barnahajú férfiak.

2. Feladat. Legyen $A = \{n \in \mathbb{N} | \, n \text{ páros}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} | \, n < 4\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} | \, n \geq 2\}$.
Állapítsuk meg, mik lesznek a következő halmaz elemei:

$$X = (A \setminus (B \cap C)) \cup ((A \setminus B) \setminus C).$$

3. Feladat. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:
a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
b) $(A \cup B) \cap (B \cup B)$
c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

4. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi összefüggések bármely tetszőleges A, B, C halmazok esetén fennállnak:
a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
c) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
d) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$
e) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
f) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
g) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

5. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi összefüggések közül melyek igazak tetszőleges A, B, C halmazok esetén:
a) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$
b) $(A \cap B) \subset A$
c) $(A \cap B) \subset (A \setminus B)$
d) $(A \setminus B) \subset (A \cup B)$
e) $\overline{(A \cup B)} \not\subseteq \overline{A}$
f) $(A \setminus B) \not\subseteq B$
g) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
h) $A \cap B \cap C) = A \cap B \cap (B \cup C)$
i) $(A \setminus (A \setminus \overline{B})) \cup B = A \cup B$
j) $(A \cup B) \setminus A = B$
k) $\overline{(A \cup B)} \setminus \overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
l) $\overline{(A \cup B)} \cap C = (\overline{A} \cap C) \cap (\overline{B} \cap C)$

6. Feladat. Ha A, B és C halmazok páronként diszjunktak, akkor hozzuk egyszerűbb alakra: $((A \setminus B) \cap (B \setminus C)) \cup (C \setminus A)$.

7. Feladat. Ha A, B és C halmazokra fennáll, hogy $C \subset B \subset A$, akkor hozzuk egyszerűbb alakra: $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

8. Feladat. Tegyük fel, hogy $(A \setminus B) \subset C$. Igaz-e, hogy $A \subseteq (B \cup C)$?

9. Feladat. Mely A, B halmazokra teljesül, hogy
a) $A \setminus B = A \cup B$
b) $A \setminus B = A \cap B$.

10. Feladat. Egy 33 fős osztályban 3 féle idegennyelvet beszélnek: 20 diák tud angolul, 16 németül, 6 franciául, és 5 diák beszél pontosan két különböző nyelven 2 pedig mindhármon. Hányan nem beszélnek egyetlen idegennyelvet sem, illetve hányan tudnak pontosan egy nyelven beszélni?

11. Feladat. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben televízió és 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz egyszerre?

12. Feladat. Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{1, 2, 3\}$. Írjuk fel az
a) $(A \times B) \cap (B \times A)$
b) $(A \times B) \setminus (B \times A)$

13. Feladat. Ábrázoljuk a következő ponthalmazokat a koordinátasíkon:
a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$,
b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,
c) $\{(x, y) | \, x < 2, \, y > 3\}$,
d) $\{(x, y) | \, |x| < 2\}$,
e) $\{(x, y) | \, x \leq 2, \, |y| = 3\}$,
f) $\{(x, y) | \, x \leq y\}$,

g) $\{(x,y) | \, y = 2x+1\}$,
h) $\{(x,y) | \, x^2+y^2 \geq 2\}$,

14. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval minden $n \in \mathbb{N}$ számra:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$,

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1$,

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}, \qquad n \geq 2$

g) $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad a_k \in \mathbb{R}$

15. Feladat. (Áltlánosított de Morgan azonosságok) Mutassuk meg, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén tetszőleges $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n$ halmazokra:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$$

és

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$$

16. Feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén tetszőleges $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n$ és B halmazokra:

$$B \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = (B \setminus A_1) \cup (B \setminus A_2) \cup (B \setminus A_3) \cup \ldots \cup (B \setminus A_n)$$

és

$$B \setminus (A1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = (B \setminus A_1) \cap (B \setminus A_2) \cap (B \setminus A_3) \cap \ldots \cap (B \setminus A_n)$$

17. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy ha az A halmaz elemszáma n, akkor a hatványhalmazának, $P(A)$-nak az elemszáma 2^n.

18. Feladat. Legyen az A_1 halmaz elemszáma k_1, A_2 halmazé k_2 és így tovább, A_n halmazé k_n. Igazoljuk, hogy $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ elemeinek száma $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.

19. Feladat. (Binomiális tétel) Lássuk be teljes indukció segítségével, hogy bármely $u, v \in \mathbb{R}$-re

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

20. Feladat. (Bernoulli egyenlőtlenség) Lássuk be teljes indukció segítségével, hogy bármely $h > -1$-re

$$(1+h)^n \geq 1 + hn.$$