5. és 6. gyakorlat
Differenciálszámítás

F1. Legyen
$$f(x) := \sqrt{x^2-1} \qquad \big(x \in [1,+\infty)\big).$$

(a) A definíció alapján állítsa elő a függvény deriváltját ott, ahol lehetséges. Mit vesz észre?

(b) Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0 = 3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.

F2. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$,

(b) $f(x) := 3a^x - \cos x$,

(c) $f(x) := (1+x^3)e^x$ (a szorzatfüggvény deriválási szabályával).

F3. Legyen
$$f(x) := \frac{1-x}{1+x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big).$$

(a) Számítsa ki $f'(x)$-et (a hányadosfüggvény deriválási szabályával).

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írja fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(d) Van-e olyan pontja a grafikonnak, ahol az érintő vízszintes?

F4. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva határoza meg $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := (3x^2+4x+1)^5$;

(b) $f(x) := (1+\sqrt[3]{x})^3$;

(c) $f(x) := \sqrt{x^2+1}$;

(d) $f(x) := e^{x^4}$;

(e) $f(x) := \operatorname{tg}\big((x^2+x)^3\big)$;

(f) $f(x) := \cos\big(e^{2x+3}\big)$;

(g) $f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(h) $f(x) := \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$.

Opcionális

F5. Számítsa ki a deriváltját a következő függvénynek:

$$f(x) := \frac{x^3+3}{x^2-x-2}.$$

F6. Legyen

$$f(x) := \big(x^2+1\big)e^x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big).$$

Írja fel a függvény grafikonjához húzott érintőegyenes egyenletét az $x_0 = 0$ abszcisszájú pontban.

F7. Határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ \dfrac{3}{2}, & \text{ha } x = -1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és azok fajtáit.

F8. A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = -3$ szám gyöke a

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + cx - 6$$

polinomnak? Határozza meg ebben az esetben a polinom összes valós gyökét és írja fel a polinom gyöktényezős alakját.