

### 3. gyakorlat

## Elemi függvények. Műveletek valós-valós függvényekkel

**F1.** Adja meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \cdot \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|.$$

**Definíció.** (Valós-valós függvények kompozíciója vagy összetett függvénye.) *Legyen  $f$  és  $g$  olyan valós-valós függvény, hogy  $\exists x \in \mathcal{D}_g$  elem, amelyre  $g(x) \in \mathcal{D}_f$ . Ebben az esetben az  $f$  (külső) és a  $g$  (belső) függvény **összetett függvényét** (vagy más szóval  $f$  és  $g$  **kompozícióját**) az  $f \circ g$  (olv. „ $f$  kör  $g$ ”) szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:*

$$f \circ g : \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(g(x)).$$

**F2.** Írja fel az  $f \circ g$  és a  $g \circ f$  kompozíciót a következő függvények esetében:

(a)  $f(x) := 1 - x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $g(u) := \sqrt{u}$  ( $u \in \mathbb{R}_0^+$ );

(b)  $f(x) := x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $g(u) := 2^u$  ( $u \in \mathbb{R}$ ).

**Definíció.** (Valós-valós függvény inverze.) *Az  $f$  valós-valós függvény **invertálható** (vagy **injektív**), ha az  $f$  értékkészletének minden eleme az értelmezési tartományának pontosan egy eleméhez van hozzárendelve, azaz*

$$\forall y \in \mathcal{R}_f\text{-hez } \exists \text{ egyetlen olyan } x \in \mathcal{D}_f \text{ amelyre } y = f(x).$$

*Ebben az esetben az*

$$\mathcal{R}_f \longrightarrow \mathcal{D}_f, \quad x \longmapsto y, \quad \text{amelyre } f(y) = x$$

*függvényt az  $f$  **inverz függvényének** nevezzük és az  $f^{-1}$  szimbólummal jelöljük.*

**F3.** Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := |x^2 - 7x + 12| \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény nem invertálható.

**F4.** Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \frac{x-2}{2x+3} \quad \left(\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}\right)$$

függvény invertálható, és állítsa elő az inverz függvényt.

## Opcionális

**F5.** Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \frac{x+1}{x-2} \quad (\mathbb{R} \setminus \{2\})$$

függvény invertálható, és állítsa elő az inverz függvényt.

**F6.** Vizsgálja meg invertálhatóság szempontjából az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt[3]{27-x^3}$$

függvényt. Adja meg az inverz függvényt is, ha invertálható.