Az 1. zh témakörei
Matematika A1a-Analízis
B, D és M kurzusok
2016. őszi félév

A zh-n 4 feladat lesz az alábbi típusokból.

1. feladat. *Oldja meg $\mathbb{R}$-en az*

$$\left|\frac{2x-3}{5}-2\right| \le 6$$

egyenlőtlenséget és a megoldáshalmazt szemléltesse a számegyenesen.

Megoldás. Az egyenlőtlenséget ekvivalens átalakításokkal oldjuk meg. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

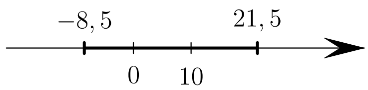
$$\left|\frac{2x-3}{5}-2\right| \le 6 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{2x-3-10}{5}\right| \le 6 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left|\frac{2x-13}{5}\right| \le 6 \quad \Longleftrightarrow \quad |2x-13| \le 30 \quad \Longleftrightarrow \quad -30 \le 2x-13 \le 30 \quad \Longleftrightarrow$$

$$-17 \le 2x \le 43 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{17}{2} \le x \le \frac{43}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -8,5 \le x \le 21,5,$$

ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $[-8,5; 21,5]$ intervallum.

Szemléltetve:



■

2. feladat. *A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = -1$ szám gyöke az*

$$x^4 - 2x^2 - 3x + c$$

polinomnak? Határozza meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írja fel a polinom gyöktényezős alakját.

Megoldás. Mivel

$$(-1)^4 - 2(-1)^2 - 3(-1) + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -2,$$

ezért a

$$p(x) := x^4 - 2x^2 - 3x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak az $x_1 := -1$ szám egyik valós gyöke. Ebből az következik, hogy p felírható a

$$p(x) = (x - x_1)q(x) = (x+1)q(x)$$

alakban, ahol $q(x)$ egy (legfeljebb) harmadfokú polinom. Ezt a q polinomot polinomosztással határozzuk meg:

$$(x^4 - 2x^2 - 3x - 2) : (x+1) = x^3 - x^2 - x - 2,$$

azaz $q(x) = x^3 - x^2 - x - 2$. Ennek gyöke nyilván a p polinomnak is gyöke lesz. Próbálgatással azt kapjuk, hogy $x_2 = 2$ gyöke q-nak (tehát p-nek is), ezért

$$q(x) = x^3 - x^2 - x - 2 = (x - x_2)r(x) = (x-2)r(x)$$

alakú, ahol r egy (legfeljebb) másodfokú polinom. Ezt az r polinomot szintén polinomosztással keressük meg:

$$(x^3 - x^2 - x - 2) : (x - 2) = x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A jobb oldali másodfokú polinom diszkriminánsa $D = 1^2 - 4 < 0$, és ez azt jelenti, hogy nincs valós gyöke.

p-nek tehát pontosan két valós gyöke van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. A szorzatra bontott (vagy más néven *gyöktényezős*) alakja:

$$p(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 1) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

3. feladat. *Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:*

$$f(x) := \sqrt{1 - x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \qquad \textit{és} \qquad g(u) := u^2 \quad (u \in \mathbb{R}).$$

Megoldás. Az $f \circ g$ kompozíció képezhető, mert $\mathcal{R}_g = [0, +\infty)$ és $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1]$ miatt $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}_g = [0, 1] \neq \emptyset$. Mivel $f \circ g$ értelmezési tatománya

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\} = [-1, 1],$$

ezért

$$f \circ g : [-1, 1] \ni x \mapsto f\big(g(x)\big) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A $g \circ f$ kompozíció is képezhető, mert $\mathcal{R}_f = [0, +\infty)$ és $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ miatt $\mathcal{R}_f \cap \mathcal{D}_g = [0, +\infty) \neq \emptyset$. A $g \circ f$ függvény értelmezési tartománya

$$\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1 - x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 1],$$

ezért

$$g \circ f : (-\infty, 1] \ni x \mapsto g\big(f(x)\big) = (\sqrt{1 - x})^2 = 1 - x.$$

(Figyelje meg, hogy $f \circ g \neq g \circ f$.) $\blacksquare$

4. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az*

$$f(x) := \frac{x + 1}{x - 2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\big)$$

függvény invertálható, és állítsa elő az inverzét.

Megoldás. *Az invertálhatóság igazolása:* Legyen $x, t \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f(x) = f(t) \iff \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{t + 1}{t - 2} \iff (x + 1)(t - 2) = (t + 1)(x - 2) \iff x = t,$$

és ez azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz előállítása: Az

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{x - 2 + 3}{x - 2} = 1 + \frac{3}{x - 2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\big)$$

átalakítás alapján *sejthető*, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ennek igazolása: $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$ nyilvánvaló. A fordított reláció igazolásához legyen $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Megvizsgáljuk, hogy ehhez van-e olyan $x \in \mathcal{D}_f$, amelyre $f(x) = y$ teljesül. Nézzük:

$$f(x) = y \iff \frac{x + 1}{x - 2} = y \iff \frac{3}{y - 1} + 2 = x.$$

Mivel $x \neq 2$, ezért $x \in \mathcal{D}_f$ valóban fennáll. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset \mathcal{R}_f$, tehát $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

A fentiek alapján f inverze az

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \ni y \mapsto \frac{3}{y - 1} + 2$$

függvény. ■

5. feladat. *Számítsa ki a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{x}$$

határértéket.

Megoldás. $\frac{0}{0}$ típusú határértékről van szó. „Alkalmas” átalakításokat végzünk:

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{x} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}.$$

Ebben az alakban már alkalmazhatjuk a műveletek és határérték kapcsolatára vonatkozó tételünket, mert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{és}$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0 \quad \text{alapján} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{2}.$$

A kérdezett határérték tehát 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{x} = 1. \quad ■$$

6. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}, & \textit{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,3\} \\ 0, & \textit{ha } x=-1, x=3 \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és azok fajtáját.

Megoldás. Mivel $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$, ezért (-1) és 3 a nevező zérushelye. Racionális törtfüggvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, ezért f az $\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$ halmaz minden pontjában folytonos. A további vizsgálatokhoz alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3} = 1+\frac{5}{x-3} \qquad (x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,3\}).$$

Legyen $x_1=-1$. A fentiek alapján

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x-3} = -\frac{1}{4} \neq f(-1) = 0,$$

ezért az $x_1=-1$ pont az f függvénynek *megszüntethető szakadási helye.*

Legyen most $x_2=3$. Ekkor

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty,$$

ami azt jelenti, hogy az $x_2=3$ pont az f függvénynek *másodfajú szakadási helye.*

■