1. feladatsor: halmazok, komplex számok

1. Így szokás halmazokat definiálni: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$. Definiáljuk:
   - a) 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza,
   - b) racionális; irracionális számok halmaza,
   - c) a négyzetszámok halmaza,
   - d) a második síknegyed pontjai,
   - e)$^{\text{hf}}$ páros számok halmaza,
   - f)$^{\text{hf}}$ prímszámok halmaza,
   - g)$^{\text{hf}}$ az egységsugarú gömbön belüli pontok,
   - h)$^{\text{hf}}$ harmadfokú polinomok halmaza.

2. Fogalmazzuk meg, hogy mit mondanak a következő állítások. Melyek igazak és melyek nem a valós számok körében? Írjuk fel az állítások tagadását!
   - a) $\forall x\ \exists y\ (y > x)$
   - b) $\exists a\ \forall b\ (b^a > 0)$
   - c) $p > 0 \Rightarrow \big[\exists q\ (p = q^2)\big]$
   - d)$^{\text{hf}}$ $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x = y^z)$
   - e)$^{\text{hf}}$ $x > 0 \Leftrightarrow \big[\exists y\ (y > 0\ \wedge\ x - y > 0)\big]$
   - f)$^{\text{hf}}$ $\big[x \in \mathbb{N}\ \wedge\ y \in (\mathbb{N} \setminus \{1, x\})\big] \Rightarrow x/y \notin \mathbb{N}$

3. Legyen $z = 1 - 4i$. Mi lesz $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$?

4. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:
   - a) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 2\}$
   - b) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| > 3\}$
   - c) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < -2\}$
   - d) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - 3| = 2\}$
   - e) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z + i| = |z - 2|\}$
   - f) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im} z > 3\}$
   - g) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ 1 < \arg z < 2\}$
   - h)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z + 2i| = \pi\}$
   - i)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z + i| \geq |z|\}$
   - j)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$
   - k)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ -3 > \operatorname{Re} z \geq 0\}$
   - l)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ z = \bar{z}\}$

5. Mi lehet z, ha
   - a) $\bar{z} - z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$
   - b) $\operatorname{Im} z = 1$, $|z| = \sqrt{2}$
   - c)$^{\text{hf}}$ $\arg z = 3\pi/4$, $\operatorname{Re} z = 5$
   - d)$^{\text{hf}}$ $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $|z - 2| = 3$

6. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$ alakba!
   - a) $(1 + 4i)(4 - 2i)$
   - b) i^7
   - c) $\dfrac{3 - 2i}{-2 + i}$
   - d) $\dfrac{3 - 2i}{3i}$
   - e)$^{\text{hf}}$ i^{2009}
   - f)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{1}{i}$
   - g)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{2 - i}{i - 1}$
   - h)$^{\text{hf}}$ $(2 + i)^{37}(2 - i)^{38}$

Emlékeztető

– Logikai jelek: $\forall$ minden; $\exists$ létezik; $\exists!$ létezik egyetlen; $\wedge$ és; $\vee$ vagy; $\neg$ nem; $\Rightarrow$ következik; $\Leftrightarrow$ ekvivalens;
Halmazok: $\mathbb{N}$ természetes számok; $\mathbb{Z}$ egészek; $\mathbb{Q}$ racionálisok; $\mathbb{R}$ valós számok; $\emptyset$ üres halmaz.

– A *komplex számok* a $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alakú számok, ahol $i = \sqrt{-1}$. Az itt szereplő a a szám *valós része*, azaz $\operatorname{Re}(z) = a$, míg b az *imaginárius*, vagy *képzetes része*, azaz $\operatorname{Im}(z) = b$.
Minden 0-tól különböző komplex szám alkalmas $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$-vel egyértelműen írható $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ alakba. Itt r a szám *abszolút értéke*, azaz $|z| = r$, φ az *argumentuma*, azaz $\arg(z) = \varphi$.
Egy $z = a + ib$ komplex szám *konjugáltja*: $\bar{z} = a - ib$.

2. feladatsor: komplex számok, n-edik gyökvonás

1. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:
   a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z+1) = |z-1|\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 5, \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)\}$
   c)$^{\mathrm{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < |z-2i|, |z-i| \leq 1\}$
   d)$^{\mathrm{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| + |z+3| = 7\}$

2. Írjuk a következő komplex számokat $a+ib$, esetleg $r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ alakba!

a) $(1-i)^{997}$	b) $\sqrt{2}$	c) $\sqrt{i}$
d) $\sqrt[3]{1}$	e) $\sqrt[3]{1+i}$	f)$^{\mathrm{hf}}$ $\sqrt[3]{27i}$
g)$^{\mathrm{hf}}$ $(1+i\sqrt{3})^{100}$	h)$^{\mathrm{hf}}$ $\sqrt{\dfrac{i}{i-3}}$	i)$^{\mathrm{hf}}$ $\dfrac{\sqrt{i}}{1-i}$

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a komplex számok körében. Az egyenletekben szereplő polinomoknak írjuk fel a gyöktényezős felbontását!
   a) $z^2 - iz + 3 + 2i = 0$
   b) $z^3 - 8 = 0$
   c)$^{\mathrm{hf}}$ $\bar{z} - z = 0$
   d)$^{\mathrm{hf}}$ $3z^2 - iz^2 + 3iz + 6 - i = 0$
   e)$^{\mathrm{hf}}$ $z^6 + 16z^2 = 0$

4. Adjuk meg az összes olyan z komplex számot, amelyre
   a) $\mathrm{Re}(z) + 2\,\mathrm{Im}(z) = 0$ és $\mathrm{Re}(z^2) - 2\,\mathrm{Im}(z) = 1$
   b) $z^2 + \bar{z} = 0$
   c)$^{\mathrm{hf}}$ $\mathrm{Re}(z^2) = 2\,\mathrm{Im}(z)$ és $\mathrm{Im}(z^2) = 2\,\mathrm{Re}(z)$

5. Hány komplex gyöke lehet egy hetedfokú valós együtthatós polinomnak?

6. Egy szabályos hatszög egyik csúcsa $2+i$, középpontja $3+2i$. Írjuk fel a többi csúcsát!

7.$^{\mathrm{hf}}$ Van-e olyan z komplex szám, amelyre $\bar{z}^2$, (azaz $(\bar{z})^2$) és z^{-2} (azaz $(z)^{-2}$) egyenlő?

8.$^{\mathrm{hf}}$ Hol a hiba? $\quad -1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1}\sqrt{1} = \left(\sqrt{1}\right)^2 = 1$

Emlékeztető

– $(r\cos\alpha + ri\sin\alpha)(s\cos\beta + si\sin\beta) = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

– $\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)$ ahol $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1)$

3. feladatsor: sorozatok határértéke

1. Állapítsuk meg, hogy nullsorozat-e! Ha igen, akkor oldjuk meg a *közelítés alapfeladatát*, azaz a definíció alapján keressünk N küszöböt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz.

   a) $a_n = 0$ b) $b_n = \dfrac{1}{n}$ c) $c_n = (-1)^n$

   d) $d_n = \dfrac{1}{n^2}$ e)$^{\text{hf}}$ $e_n = \sin n$ f)$^{\text{hf}}$ $f_n = \dfrac{(-1)^n}{\log_{10} n}$

2. Határozzuk meg a határértékeket, és keressünk N küszöböt ε-hoz a definíció alapján!

   a) $\lim \dfrac{3n-1}{4n+99}$ b) $\lim \dfrac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1}$ c) $\lim \dfrac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1}$

   d)$^{\text{hf}}$ $\lim \dfrac{7n+4}{2n-1}$ e)$^{\text{hf}}$ $\lim \dfrac{5n^3-2}{n^3+3}$ f)$^{\text{hf}}$ $\lim \dfrac{n-6}{6n^2+16}$

3. Íjuk fel formulával (minél kevesebb zárójellel) az a_n sorozatra vonatkozó állításokat:

   a) a_n korlátos,

   b) a_n monoton növekvő,

   c)$^{\text{hf}}$ $a_n \not\to a$,

   d)$^{\text{hf}}$ a_n divergens.

4. Számítsuk ki az $a_n = \left(\sqrt{n^2+n-3} - n\right)$ sorozat határértékét, és keressünk N küszöbindexet az $\varepsilon = 0.01$ hibahatárhoz! Bizonyítsuk be, hogy tényleg annyi a határérték!

5.$^{\text{hf}}$ Egy egyre pontosodó mérési sorozat n-edik mérésének eredménye $a_n = 1 + (-1)^{n+1}2^{3-n}$. Hányadik mérés után csökken a mért mennyiség és a mért érték eltérése (azaz a hiba) $\varepsilon = 10^{-4}$ alá?

6. Vizsgáljuk konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat:

   a) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{(5-2n)n!}$ b) $b_n = \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$

7.$^{\text{hf}}$ A gonosz varázsló mindennap arannyá változtatja a Földön lévő vízmennyiség felét. Mennyi idő múlva csökken a vízkészlet 1 pohárnyi alá? (A Földön kb. $1386 \cdot 10^6$ km^3 víz van.) Mennyi idő múlva marad csak 1 vízmolekula?

Emlékeztető

– Az $a_1, a_2, \dots a_k, \dots$ valós számokból álló *sorozatot* (a_n) jelöli.

– Az a_n sorozat *nullsorozat*, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n| < \varepsilon$. Ezt kétféleképp lehet jelölni: $a_n \to 0$ vagy $\lim a_n = 0$.

– Az a_n sorozat *határértéke az a szám*, jelölve $a_n \to a$ vagy $\lim a_n = a$, ha $a_n - a$ nullsorozat. Ekkor a_n *konvergens*, különben *divergens*.
(Közvetlenül ez így is fogalmazható: $\lim a_n = a$, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.)

4. feladatsor: sorozatok határértéke

1. Vizsgáljuk: korlátosság, supremum, infimum, határérték.

 a) $\dfrac{\cos(n\pi)}{n} + (-1)^{n+1}$ b) $(-2)^n + \dfrac{1}{n!}$ c)$^{\text{hf}}$ n^{-n} d)$^{\text{hf}}$ $n^{(-1)^n}$

2. Mennyi lehet $\lim a^n$ értéke (a-tól függően, $a \in \mathbb{R}$)?

3. Számoljuk ki a határértékeket:

 a) $\lim \dfrac{n^{-1}}{1+n^{-2}}$ b) $\lim \dfrac{n^5 - 216n^2 + n - 2}{-n^8 + 500n^4 + 86}$

 c) $\lim \dfrac{n^{22} + 18n^{18}}{8n^{22} - 4n^2}$ d) $\lim \dfrac{2^n + 82n^{47} + 23610}{-14n^{25} + 2n^8 + 3}$

 e) $\lim \dfrac{5^n + 401n + 402}{2^{2n} + n - 88}$ f) $\lim \dfrac{25n! + n^{25}}{25n^n}$

 g) $\lim \left(\sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9}\right)$ h) $\lim \left(\sqrt{2n^2+5n} - \sqrt{2n^2-n}\right)$

 i) $\lim \left(\sqrt{n^4+2n} - n^2\right)$ j) $\lim \dfrac{1}{n - \sqrt{n^2+3n+5}}$

4. Igaz? Hamis?

 a) ha $a_n \to a$, akkor $a_n^2 \to a^2$ b) ha $a_n^2 \to a^2$, akkor $a_n \to a$

 c) ha $a_n > 0$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n b_n \to \infty$ d) $a_n \to 0 \;\Rightarrow\; 1/a_n \to \infty$

 e) $a_n \to \infty \;\Rightarrow\; 1/a_n \to 0$ f) $[a_n > 0$ és a_n konvergens$] \;\Rightarrow \lim a_n > 0$

 g) $[a_n$ korlátos, $b_n \to 0] \;\Rightarrow\; a_n b_n \to 0$

5.$^{\text{hf}}$ Számoljuk ki a következő határértékeket:

 a) $\lim \dfrac{n^{2/3} + 8n^{\sqrt{3}} + \sqrt{n} + 12}{n^2 + 5n - 7}$ b) $\lim \dfrac{n^{-2} + 4}{2n^{-3} - 1}$

 c) $\lim \dfrac{9\sqrt[3]{n} - 3\sqrt{2n} + 1}{\sqrt[4]{n} + \sqrt{3n}}$ d) $\lim \dfrac{\log_{10}(n^2) + 3}{\log_3(n) - 1}$

 e) $\lim \dfrac{(-3)^{n+1} + 2^{2n+3}}{8 + 5^n}$ f) $\lim \dfrac{n^3 \cdot 2^n + 3^n}{2^{2n} - 3n^2}$

 g) $\lim \dfrac{4^{n-1} + n^5 \cdot 3^{n+3}}{2^{2n+3} + 2^{n-3}}$ h) $\lim \dfrac{7^n + n^7 + 7}{2^{2n} + (2n)^2 + 2}$

 i) $\lim \left(\sqrt{9n^2+7} - \sqrt{9n^2+2n+5}\right)$ j) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3-3n+3} - \sqrt[3]{n^3+123n^2-1}\right)$

6.$^{\text{hf}}$ Legyen $p(x)$ és $q(x)$ egy-egy polinom. Adjunk módszert $\lim \dfrac{p(n)}{q(n)}$ meghatározására!

Emlékeztető

– Ha a_n divergens, de $\forall K$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n > K$, akkor $a_n \to \infty$.

– Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *infimuma* (azaz $\inf H$) a H halmaz alsó korlátjai közül a legnagyobb.
 H *supremuma* (azaz $\sup H$) pedig H felső korlátjai közül a legkisebb.
 H *minimuma* l, ha $l \in H$ és $l = \inf H$. H *maximuma* h, ha $h \in H$ és $h = \sup H$.
 Egy sorozat infimuma, supremuma az elemei által alkotott halmaz infimuma, supremuma.

5. feladatsor: speciális sorozatok, numerikus sorok

1. Számoljuk ki:

a) $\lim \left(1-\frac{3}{n^3}\right)^{n^3}$ b) $\lim \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-3}$ c) $\lim \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+7}$

d) $\lim \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n}$ e) $\lim \left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^{\frac{n}{2}+1}$ f) $\lim \frac{\left(5-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(5+\frac{1}{n}\right)^n}$

g)[hf] $\lim \left(1+\frac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}$ h)[hf] $\lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$ i)[hf] $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

2. Felhasználva hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$ és $\sqrt[n]{p} \to 1\,(p>0)$, számoljuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim \sqrt[2n]{2n}$ b) $\lim \sqrt[n]{2n}$ c) $\lim \sqrt[2n]{n}$ d) $\lim \sqrt[n]{99n^{99}}$

e) $\lim \sqrt[n]{n+5}$ f) $\lim \sqrt[n]{2n^3+3}$ g)[hf] $\lim \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$ h)[hf] $\lim \sqrt[n^2]{n}$

3.[hf] A plutónium-238 felezési ideje 87.7 év. Jelöljük a_n-el egy gyártáskor 50 kilogramm Pu-238-at tartalmazó atombombában n év eltelte után maradó Pu-238 tömegét. Írjuk fel az a_n sorozatot! Hányadik évben fog a Pu-238 tömege 0.1 kilogramm alá csökkenni?

4. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ c)[hf] $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

5. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$ b) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{5^n}$

d)[hf] $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{3n+1}+(-5)^n}{3^{2n+2}}$ e)[hf] $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^{n+1}}{3^{2n+1}}$ f)[hf] $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{3n-1}-2^n}{4^{2n-1}}$

Emlékeztető

– A *rendőrszabály* vagy *csendőrelv*: Ha $a_n \le b_n \le c_n$, és $\lim a_n = \lim c_n = h$, akkor $b_n \to h$ is.

– Előadáson szerepelt, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, és a határértékére bevezettük az e jelölést. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

– Ha (a_n) egy sorozat, akkor a $\sum a_n$ szimbólum neve *sor*. A sor *összege*: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)$. Ez a határérték nem mindig létezik. Ha létezik és véges, akkor a sor *konvergens*.

– A geometriai sor összege: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$, ha $|q|<1$.

6. feladatsor: numerikus sorok

1. Mely α-ra konvergens, melyre divergens a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sor?

2. Konvergens? (Használjuk a majoráns, minoráns kritériumokat.)

a) $\sum \frac{2n+1}{n^2}$ b) $\sum \frac{5n+2}{n^7}$ c) $\sum \frac{7n^3-7}{n^5+2n^4}$ d) $\sum \frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7}$

e)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{2^n+3^{n+1}}{1+6^{n-1}}$ g)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ h)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

3. Konvergens? (Használjuk a hányados- és gyökkritériumot.)

a) $\sum \frac{7^{n-2}}{(n+1)!}$ b) $\sum \frac{5^{3n}}{n^4}$ c) $\sum \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$

d) $\sum \frac{2^{2n}}{n^5 2^{3n+1}}$ e)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{2^{3n}n^7}{3^{2n+1}}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{(n+5)\cdot 3^{n-1}}{5^{n+1}}$

g)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{(n+2)\cdot 4^{n-1}}{(n+5)\cdot n!}$ h)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{(n+1)!}{n^n}$ i)$^{\text{hf}}$ $\sum \left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^{n^2}$

4. Igaz? Hamis?

a) $\sum a_n$ konvergens $\Rightarrow \lim a_n = 0$ b) $\lim a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ konvergens

c) $\sum a_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n^2$ konvergens

5.$^{\text{hf}}$ Lássuk be, hogy 0.123123123123... racionális szám, és írjuk fel mint két egész szám hányadosa.

6. Konvergens? Abszolút konvergens?

a) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ c) $\sum (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}$

d)$^{\text{hf}}$ $\sum (-1)^n \frac{2^n}{3^n+1}$ e)$^{\text{hf}}$ $\sum (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{3n-2}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n$

Emlékeztető

– *Majoráns kritérium*: Ha $0 \le a_n \le b_n$, és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is.

– *Minoráns kritérium*: Ha $0 \le a_n \le b_n$, és $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is.

– *Gyökkritérium (Cauchy)*: Legyen $a_n \ge 0$, és $w = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Ha $w < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens; ha $w > 1$, akkor divergens; míg ha $w = 1$, akkor bármi előfordulhat.

– *Hányadoskritérium (D'Alembert)*: Legyen $a_n \ge 0$, $w = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ha $w < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens; ha $w > 1$, akkor divergens; míg ha $w = 1$, akkor bármi előfordulhat.

– Egy $\sum a_n$ sor *Leibniz-sor*, ha $|a_n|$ mon. csökkenő, $\lim a_n = 0$, és a_n előjele váltakozó. Tétel *(Leibniz-kritérium)*: Minden Leibniz-sor konvergens.