A Fourier analízis válogatott alkalmazásai

Matolcsi Máté

Oktatási segédanyag, BME, Budapest, 2015

Az olvasó egy oktatási jegyzetet tart a kezében, amelyben előfordulhatnak hibák. Kérem, hogy ha hibát talál, jelezze a szerzőnek.

Ez az oktatási segédanyag a BME-n 2015 őszi félévben tartott "Fourier analízis alkalmazásai a matematikában" című kutatószeminárium jegyzeteként készült. A szemináriumon csak a Delsarte módszer alkalmazásait vettük sorra, ezek vannak alább kidolgozva. A további fejezetek csak címszavakkal vannak említve, mint egy jövőben tartandó speciálelőadás tervezett témakörei, óravázlata. A témaköröket a tervezett heti lebontás szerint adom meg.

1. Három tagú számtani sorozatok

Az egyik leghíresebb kérdés additív kombinatorikában a következő: maximum hány eleme lehet egy $A \subset [1, N]$ halmaznak, ha tudjuk, hogy A nem tartalmaz 3-tagú számtani sorozatot? Az egyre erősebb felső becslések bizonyításában a Fourier analízis meghatározó szerepet játszik Roth, Heath-Brown, Szemerédi, Bourgain és végül Sanders munkáiban.

1.1. Roth módszere (1-2. hét)

Rövid bevezetővel kezdjük a Fourier analízis eszközeiről (kommutatív csoport karakterei, függvények konvolúciója, Fourier inverziós formula, Parseval azonosság, speciálisan véges csoportokra, $\mathbb{Z}^n$-re, $\mathbb{R}^n$-re). Ezután tárgyaljuk Roth [19] alapvető sűrűségnövekményes módszerét, amely az első nem-triviális becslést adta a 3-tagú számtani sorozatokat elkerülő halmazok számosságára, és amely sok más additív problémában is alkalmazást nyert.

1.2. A Croot-Sisask lemma (3. hét)

Sanders legújabb (és jelenleg legerősebb) becsléseiben [20] kulcsszerepe van a Croot-Sisask lemmának, amely összeghalmazoknak egy alapvető Fourier analitikus tulajdonságát írja le. A lemma sok egyéb alkalmazást is nyert.

Noha Sanders eredményeinek részletes tárgyalása nem fér bele a speciálelőadás kereteibe, a Croot-Sisask lemmát [7] tárgyalni fogjuk.

2. Parkettázások

Egy Abel csoportnak egy rögzített alakzat eltoltjaival való egyrétű fedését parkettázásnak hívjuk. Az általunk vizsgált esetekben a csoport vagy véges, vagy az egészek többdimenziós rácsa, vagy az euklideszi tér. Mivel a parkettázási tulajdonság lényegében egy konvolúciós azonosság, ezért természetes módon tárgyalható a Fourier analízis eszközeivel [11].

2.1. Az egész számok parkettázásai (4-5. hét)

Az egész számoknak minden parkettázása periodikus. A periódus hosszára Fourier analízis segítségével adunk nem-triviális felső becslést [12]. Ezután tárgyaljuk a Coven-Meyerowitz sejtést [5], amely teljes karakterizációt adna az egészek parkettázásaira, bizonyos Fourier zéróhalmazokra vonatkozó feltételekkel. Megnézzük a sejtés bizonyítását abban az esetben, amikor a parkettázó halmaz elemszáma legfeljebb két különböző prímmel osztható.

2.2. Parkettázó és spektrális halmazok (6. hét)

Bevezetjük a spektrális halmazok fogalmát, és kapcsolatukat a parkettázásokkal. Belátjuk Fuglede sejtésének azt a speciális esetét, amikor a spektrum egy rács [9].

3. A Delsarte-módszer alkalmazásai

Delsarte ún. lineáris programozási (LP) becslése [8] eredetileg a következő probléma kapcsán jelent meg: maximum hány n hosszú bináris szó adható meg úgy, hogy bármely kettő legalább d helyen eltérjen egymástól? Delsarte módszerét (és természetes általánosításait) azóta olyan nevezetes problémákban használták sikerrel, mint például a gömbpakolások sűrűségének becslése [3], vagy az egység távolságot elkerülő halmazok problémája [17].

Ebben a jegyzetben a Delsarte módszer Fourier analitikus megfogalmazását tárgyaljuk. Ez elég általános ahhoz, hogy a legtöbb alkalmazást magába foglalja, ugyanakkor az elemi Fourier analízis eszközei elegendőek a tárgyaláshoz.

3.1. A Delsarte-féle LP becslés (7. hét)

Először is a Delsarte-féle LP becslés Fourier analitikus megfogalmazását tárgyaljuk. Legyen G kompakt Abel-csoport, és legyen adva egy szimmetrikus $A = -A \subset G$, $0 \in A$ mérhető halmaz (a továbbiakban: standard halmaz). Az A halmazt "tiltott halmaznak" is fogjuk hívni. Szeretnénk meghatározni, hogy maximum mennyi lehet egy $B = \{b_1, \dots b_m\} \subset G$ halmaz számossága, ha minden $b_j - b_k \in A^c \cup \{0\}$ (azaz a különbségek elkerülik a tiltott halmazt). Megjegyezzük, hogy a módszer lényeges tulajdonságai érvényben maradnak lokálisan kompakt csoportokra is, amely esetben mindig megfelelő határátmeneti megfontolásokra van szükség (például a gömbpakolások esetében euklideszi terekben).

A Delsarte-féle felső becslés B elemszámára a következő ötleten alapul.

Keressünk egy úgynevezett tanúfüggvényt a következő tulajdonságokkal:

• $h : G \to \mathbb{R}$ páros függvény (azaz $h(x) = h(-x)$), amelyre a Fourier inverziós formula teljesül (legegyszerűbb példaként h lehet karakterek véges lineáris kombinációja)

• $h(x) \leq 0$ minden $x \in A^c$ esetén

• $\hat{h}(\gamma) \geq 0$ minden $\gamma \in \hat{G}$ esetén (azaz a Fourier transzformált nemnegatív)

• $\hat{h}(0) = 1$. (Itt $0 \in \hat{G}$ jelöli a triviális karaktert, azaz a konstans 1 függvényt G-n. Ez a feltétel csak egy normalizáció, és ehhez kikötjük, hogy a csoporton normalizált Haar mértékkel dolgozunk, azaz G mértéke 1).

Minden ilyen tanúfüggvény egy felső becsléshez vezet B elemszámára az alábbi lemma szerint.

1 Lemma. *(Delsarte-féle LP becslés)*
Legyen $h : G \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely teljesíti a fenti feltételeket, és legyen $B = \{b_1, \dots b_m\} \subset G$ olyan halmaz, amelyre minden $b_j - b_k \in A^c \cup \{0\}$. Ekkor $|B| \le h(0)$.

Bizonyítás. Minden $\gamma \in \hat{G}$ esetén használjuk a $\hat{B}(\gamma) = \sum_{j=1}^m \gamma(b_j)$ jelölést. Most tekintsük a következő összeget.

$$S = \sum_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{B}(\gamma)|^2 \hat{h}(\gamma). \tag{3.1}$$

Minden tag nemnegatív, és a $\gamma = 0$-hoz (azaz a triviális karakterhez) tartozó tag adaléka $|\hat{B}(0)|^2 \hat{h}(0) = |B|^2$. Tehát

$$S \ge |B|^2. \tag{3.2}$$

Másrészt $|\hat{B}(\gamma)|^2 = \sum_{j,k} \gamma(b_j - b_k)$, így $S = \sum_{\gamma,j,k} \gamma(b_j - b_k)\hat{h}(\gamma)$. Felösszegezve fix j, k-ra azt kapjuk, hogy $\sum_\gamma \gamma(b_j - b_k)\hat{h}(\gamma) = h(b_j - b_k)$ (a Fourier inverziós formula szerint), tehát $S = \sum_{j,k} h(b_j - b_k)$. Vegyük észre, hogy itt $j = k$ tagból éppen $|B|$ számú van, és minden más tag (amikor $j \ne k$) nempozitív, hiszen $b_j - b_k \in A^c$, és h-ról feltettük, hogy az A^c halmazon nempozitív. Tehát

$$S \le h(0)|B|. \tag{3.3}$$

Összevetve a (3.2), (3.3) becsléseket éppen az adódik, hogy $|B| \le h(0)$. $\square$

2 Megjegyzés. A módszer egyik előnye, hogy *minden* tanúfüggvény ad valamilyen becslést. Lehetséges, hogy nem találjuk meg a legjobb tanúfüggvényt, de mégis kaphatunk viszonylag jó felső becslést.

3 Megjegyzés. Vegyük észre, hogy minden h-ra vonatkozó feltétel *lineáris*. Ezért véges csoportokon (ha a számosság nem túl nagy) biztosan megtalálhatjuk a legjobb tanúfüggvényt lineáris programozással. Ez nagyon előnyös, és gyakran intuíciót ad arra is, hogy mi történik végtelen csoportok esetén.

Most rátérünk a lineáris programozásbeli dualitás elv következményeire. Ehhez be kell vezetnünk a következő jelöléseket (itt az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy G véges):

$$\Delta(A) = \max\big\{|B| : B \subset \mathcal{G}, (B - B) \cap A = \{0\}\big\},\ \delta(A) = \Delta(A)/q$$
$$\overline{\Delta}(A) = \max\big\{|B| : B \subset \mathcal{G}, B - B \subset A\big\},\ \overline{\delta}(A) = 1/\overline{\Delta}(A).$$

$$\mathcal{S}(A) = \big\{f : G \to \mathbb{R}, f \not\equiv 0, f|_{\mathcal{G}\setminus A} = 0\big\}\,,$$
$$\mathcal{S}^-(A) = \big\{f : G \to \mathbb{R}, f \not\equiv 0, f|_{\mathcal{G}\setminus A} \le 0\big\}\,,$$
$$\mathcal{S}^+(A) = \big\{f : G \to \mathbb{R}, f \not\equiv 0, f|_{\mathcal{G}\setminus A} = 0, f|_A \ge 0\big\}\,,$$
$$\mathcal{S}^\pm(A) = \big\{f : G \to \mathbb{R}, f \not\equiv 0, f|_{\mathcal{G}\setminus A} \le 0, f|_A \ge 0\big\}\,.$$

$$\lambda(A) = \min\left\{\frac{f(0)}{\hat{f}(\chi)} : f \in \mathcal{S}(A), \hat{f}(\gamma) \ge 0 \text{ for all } \gamma\right\},$$

$$\lambda^-(A) = \min\left\{\frac{f(0)}{\hat{f}(\chi)} : f \in \mathcal{S}^-(A), \hat{f}(\gamma) \ge 0 \text{ for all } \gamma\right\},$$

$$\lambda^+(A) = \min\left\{\frac{f(0)}{\hat{f}(\chi)} : f \in \mathcal{S}^+(A), \hat{f}(\gamma) \ge 0 \text{ for all } \gamma\right\},$$

$$\lambda^\pm(A) = \min\left\{\frac{f(0)}{\hat{f}(\chi)} : f \in \mathcal{S}^\pm(A), \hat{f}(\gamma) \ge 0 \text{ for all } \gamma\right\}.$$

A $\lambda(A)$ mennyiséget *Turán konstansnak*, a $\lambda^-(A)$ mennyiséget pedig *Delsarte konstansnak* szokás nevezni [18]). Azt érdemes megjegyezni, hogy a δ, Δ mennyiségek azok, amelyeket becsülni akarunk, és a λ mennyiségek azok, amelyek a tanúfüggvényekből adódnak. Ezekre a mennyiségekre a következő alapvető tétel igaz:

4 Tétel. ([15])

$$1/q \le \delta(A) \le \lambda^-(A) \le \left\{ \begin{matrix} \lambda(A) \\ \lambda^{\pm}(A) \end{matrix} \right\} \le \lambda^+(A) \le \overline{\delta}(A) \le 1. \tag{3.4}$$

Ebben a tételben a $\delta(A) \le \lambda^-(A)$ egyenlőtlenség az 1. Lemmában leírt Delsarte-féle lineáris programozási becslés. Az egyetlen további nem-triviális egyenlőtlenség $\lambda^+(A) \le \overline{\delta}(A)$, amely azonban szintén könnyen adódik, ha észrevesszük, hogy $B - B \subset A$ esetén $1_B * 1_{-B} \in \mathcal{S}^+(A)$.

A bevezetett jelölések lehetőséget adnak megfogalmazni a lineáris dualitás következményeit a következő formában:

5 Tétel. ([15]) *Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, $|\mathcal{G}| = q$, legyen $A \subset \mathcal{G}$ standard halmaz, és $A' = (\mathcal{G} \setminus A) \cup \{0\}$ a standard komplementuma. Ekkor*

$$\delta(A)\overline{\delta}(A') = \lambda(A)\lambda(A') = \lambda^-(A)\lambda^+(A') = \lambda^{\pm}(A)\lambda^{\pm}(A') = 1/q. \tag{3.5}$$

Bizonyítás. A lineáris dualitás alapján, lásd [15]. □

Ez a dualitás heurisztikusan azt mutatja, hogy ha a Delsarte becslés 'gyenge' felső becslést ad $|B|$-re, annak az az oka, hogy létezik egy $f \in \mathcal{S}^+(A')$ pszeudo-megoldás, ami úgy viselkedik, mintha $f = 1_B * 1_{-B}$ lenne nagy $|B|$-vel. Sajnos gyakran ez a helyzet áll elő, és a Delsarte módszer nem ad igazán éles becslést (más kérdés, hogy néha ilyen esetekben is a Delsarte módszer adja a *legjobb ismert* becslést, lásd a Paley-gráfok esetét).

A következő fejezetekben a Delsarte-féle LP becslés alkalmazásairól lesz szó. A gömbpakolások esetében a fent leírtak szinte szórul szóra alkalmazhatók [3], csak egy kompaktsági megfontolást kell hozzátenni. A Paley-gráfok esetében megismerkedünk a fenti Delsarte módszer egy lehetséges élesítésével, amely eredetileg F. Vallentintól és F. O. Filhotól származik (egy korábbi, más irányú cikkükből [17]). Az egységtávolságot elkerülő halmazok problémájánál ehhez az élesítéshez hozzátesszük még Székely László egy korábbi ötletét [21], amely a Delsarte becslés egy további javítását adja. Ezután rátérünk a MUB-problémára, ahol a Delsarte becslés kiadja a már korábbról ismert legjobb becslést [14], és nyitott kérdés, hogy vajon adhat-e jobbat. Végül megemlítjük Littlewood szimultán approximációs sejtését, amelyben a Delsarte módszer elvileg alkalmazható, azonban a megfelelő tanúfüggvény megtalálása egyelőre nyitott probléma.

3.2. Gömbpakolások (8. hét)

Évszázados probléma, hogy vajon milyen sűrűn lehet az n-dimenziós euklideszi térben egységgömböket pakolni. Vegyük észre, hogy ez a kérdés (majdnem) pontosan beleillik a fent vázolt Delsarte-féle sémába. Legyen ugyanis $G = \mathbb{R}^n$ (ami ugyan nem kompakt, de ez nem okoz különösebb problémát, mert feltehető, hogy a pakolás periodikus, és így a probléma visszavezethető a kompakt esetre), és legyen $A = B(0, 2)$ a tiltott halmaz. Ha most $B \subset \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $B - B$ elkerüli A-t, akkor az pont azt jelenti, hogy a B középpontú egységgömbök diszjunktak egymástól, azaz pakolást alkotnak.

Nincs más hátra, mint megfelelő tanúfüggvényeket keresni. Ezt teszi Cohn és Elkies [3] kis dimenziókban ($n \leq 36$), és $n = 8$ és $n = 24$ esetén numerikusan lényegében belátják, hogy a korábbról ismert rácsszerű pakolások a lehető legsűrűbbek. (Megjegyzés: ezt azóta sikerült pontosan is belátni. Még a médiába is bekerült, amikor M. Viazovska megtalálta a pontos tanúfügvényt 8 és 24 dimenzióban [22, 4].)

Az általánosság megszorítása nélkül a tanúfüggvényt kereshetjük radiális függvényként, és Cohn és Elkies $f(x) = P(|x|^2)e^{-|x|^2}$ alakban keresik, ahol P egy megfelelő polinom. Ennek a részleteit fogjuk tárgyalni [3] alapján.

3.3. Paley-gráfok függetlenségi száma (9. hét)

Legyen $p = 4k + 1$ alakú prím, és $\mathbb{Z}_p$-ben kössük össze x-et és y-t éllel, ha $x - y$ (nem-nulla) kvadratikus maradék. Az így nyert $\mathcal{P}_p$ Paley-gráfnak mennyi az s függetlenségi száma? Az $s \leq \sqrt{p}$ felső becslés szinte triviális, azonban évtizedekig ez volt a legjobb ismert felső becslés. Az alsó becslés

$s \geq (\frac{1}{2} + o(1)) \log_2 p$ (lásd [2]), és ez valószínűleg közelebb van az igazsághoz, hiszen $\mathcal{P}_p$ heurisztikusan egy random gráf.

Itt a Delsarte módszer egy [17] által bevezetett következő élesítésére lesz szükségünk:

6 Lemma. ([17]) *Legyen $B = \{b_1, \dots b_m\} \subset \mathcal{G}$ olyan, hogy $b_j - b_k \in A^c \cup \{0\}$. Legyen $h(x) = \frac{1}{|B|} \sum_{y \in \mathcal{G}} 1_B(y) 1_B(x+y)$. Tegyük fel, hogy $D \subset \mathcal{G}$ olyan, hogy bármely k különböző D-beli elem között van kettő, amelyek különbsége A-ba esik. Ekkor*

$$\sum_{x \in D} h(x) \leq k - 1. \tag{3.6}$$

Ez annyiban élesíti a Delsarte becslést, hogy új nem-triviális lineáris feltételeket ró h-ra. Ezt a lemmát alkalmazva sikerült minimálisan megjavítanunk a $s \leq \sqrt{p}$ felső becslést (3.2.2):

7 Tétel. ([1]*) *Legyen $p = 4k + 1$ prím, jelölje NQ a $\mathbb{Z}_p$-beli kvadratikus nem-maradékok halmazát, és legyen $B \subset \mathbb{Z}_p$, $|B| = s$, olyan halmaz, amelyre $B - B \subset NQ \cup \{0\}$. Ekkor*
(i) ha $n = [\sqrt{p}]$ páros, akkor $s^2 + s - 1 \leq p$
(ii) ha $n = [\sqrt{p}]$ páratlan akkor $s^2 + 2s - 2 \leq p$.

Ez a becslés a $4k + 1$ alakú prímek háromnegyedére $s \leq \sqrt{p} - 1$-re javítja a felső becslést. Noha a javulás numerikusan minimális, ugyanez eddig csak $p = 4m^2 + 1$ alakú prímekre volt ismert [13]. Továbbá van arra esély, hogy a jövőben a módszer a $s \leq \sqrt{p} - cp^{1/4}$ becslést is kiadja.

A fenti lemma és a tétel bizonyítását fogjuk tárgyalni [17] és [1] alapján.

3.4. Egységtávolságot elkerülő halmazok (10-11. hét)

Itt a probléma a következő: milyen sűrű lehet egy mérhető halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, ha elkerüli az egységtávolságot (azaz bármely két pontja között a távolság $\neq 1$)?

A problémát speciálisan 2 dimenzióban fogjuk vizsgálni. Erdős egy sejtése szerint 2 dimenzióban egy ilyen halmaz sűrűsége kisebb, mint 0.25. A legjobb ismert konstrukció kb. 0.229 sűrűségű [6] (ez elég egyszerű, ezt meg is nézzük).

A lehető legélesebb felső becslés érdekében alkalmazni fogjuk az 1. és 6. Lemmát, valamint a Delsarte-módszer következő javítását, ami Székely Lászlótól származik [21].

8 Lemma. *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan mérhető és periodikus halmaz, amely elkerüli az 1 távolságot, és legyen f az A autokorrelációs függvénye. Ha $C \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges véges ponthalmaz, akkor*

$$\sum_{\{x,y\}\in\binom{C}{2}} f(x-y) \geq |C|f(0) - 1,$$

ahol $\binom{C}{2}$ az összes C-beli pontpárt jelöli.

Ez a lemma további feltételeket ró az $f = 1_A * 1_{-A}$ autokorrelációs függvényre. Az 1., 6. és 8. Lemma segítségével sikerül olyan tanúfüggvényt találnunk [10], amely nagyon közel kerül Erdős sejtéséhez.

9 Tétel. *Egy egységtávolságot elkerülő, síkbeli, mérhető halmaz sűrűsége legfeljebb 0.258795.*

A fenti lemma bizonyítását, és a tanúfüggvény keresésének módszerét fogjuk tárgyalni.

3.5. MUB-probéma (12. hét)

Két ortonormált bázist $\mathbb{C}^d$-ben, X-et és Y-t, kölcsönösen torzítatlannak, vagy röviden MUB-nak, nevezünk ha $|\langle x, y\rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}$ minden $x \in X, y \in Y$ esetén. Ismert, hogy $\mathbb{C}^d$-ben legfeljebb $d+1$ olyan ortonormált bázis adható meg, amelyek páronként kölcsönösen torzítatlanok. Az is jól ismert, hogy ennyi valóban meg is adható, ha d prímhatvány.

Ha az egyik bázist rögzítjük, és a többit eszerint koordinátázzuk, akkor egymásra torzítatlan komplex Hadamard mátrixokat (MUH) kapunk. Minden így kapott mátrix minden oszlopát tekinthetjük egy $\mathcal{G} = \mathbb{T}^d$-beli elemnek, és az ortogonalitási és torzítatlansági feltételek felírása után világossá válik, hogy a Delsarte módszer alkalmazható. Így kapjuk a MUB-ok számára vonatkozó $d+1$-es felső becslés általánosításaként a következő tételt:

10 Tétel. ([14]) *Legyen $\mathcal{A}$ egy ortonormált bázis $\mathbb{C}^d$-ben, legyen $B = \{\mathbf{c}_1, \dots \mathbf{c}_r\}$ $\mathcal{A}$-ra torzítatlan egységvektorok rendszere. Tegyük fel, hogy minden $1 \leq j \neq k \leq r$ esetén a $\mathbf{c}_j$ és $\mathbf{c}_k$ vektorokra $\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_k \rangle = 0$ vagy $|\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_k \rangle| = 1/\sqrt{d}$. Ekkor $r \leq d^2$.*

A kutatók többsége azt sejti, hogy ha d nem prímhatvány, akkor nem adható meg $d+1$ MUB $\mathbb{C}^d$-ben. Nem tartom valószínűnek, hogy a Delsarte becslés önmagában elég lenne ennek bizonyítására még $d = 6$ esetén sem (noha erre csak heurisztikus okaim vannak). A továbblépésre több irány is kínálkozik, ezeket is meg fogom említeni.

3.6. Littlewood-sejtés (13. hét)

Végül, ha marad idő, elmondom, hogy hogyan lehetne alkalmazni a Delsarte-módszert Littlewood szimultán approximációs sejtésének bizonyítására. Ez egy nagyon váratlan és érdekes alkalmazási lehetőség, Ruzsa Imre ötlete alapján. Az a meghökkentő helyzet áll azonban elő (mindmáig), hogy egyelőre sem megfelelő tanúfüggvényt, sem pedig megfelelő duális tanúfüggvényt nem sikerül konstruálni. Márpedig a lineáris dualitás miatt (a fenti 5. Tétel) valamelyiknek léteznie kell.

Hivatkozások

[1] C. Bachoc, M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *Squares and difference sets in finite fields*, Integers, Vol. 13, Article A77, (2013).

[2] S. D. Cohen: *Clique numbers of Paley graphs*, Quaest. Math. **11**, (2), 225–231, (1988).

[3] H. Cohn, N. Elkies: *New upper bounds on sphere packings I.*, Ann. of Math. (2) **157**, no. 2, 689–714, (2003).

[4] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, M. Viazovska: *The sphere packing problem in dimension 24* http://arxiv.org/pdf/1603.06518v1.pdf

[5] E. Coven, A. Meyerowitz: *Tiling the integers with translates of one finite set*, J. Algebra **212**, (1), 161–174, (1999).

[6] H. T. Croft: *Incidence incidents*, Eureka (Cambridge) **30**, 22–26, (1967).

[7] E. S. Croot, O. Sisask: *A probabilistic technique for finding almost-periods of convolutions*, Geom. Funct. Anal., **20** (6), 1367–1396, (2010).

[8] P. Delsarte: *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. 10, (1973).

[9] B. Fuglede: *Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem*, J. Funct. Anal. **16**, 101–121, (1974).

[10] T. Keleti, M. Matolcsi, F. M. Oliveira Filho, I. Z. Ruzsa: *Better bounds for planar sets avoiding unit distances*, Discrete & Computational Geometry, 55(3), 642-661, (2016).

[11] M.N. Kolountzakis: *The study of translational tiling with Fourier Analysis*, in Fourier Analysis and Convexity, 131–187, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, (2004).

[12] M.N. Kolountzakis: *Translational tilings of the integers with long periods*, Electr. J. Combinatorics **10**, 1, R22, (2003).

[13] E. Maistrelli, D. B. Penman: *Some colouring problems for Paley graphs*, Discrete Math. **306**, 99–106, (2006).

[14] M. Matolcsi: *A Fourier analytic approach to the problem of mutually unbiased bases*, Studia Sci. Math. Hung., Vol. 49, No. 4, 482–491, (2012).

[15] M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *Difference sets and positive exponential sums I. General properties*, J. Fourier Anal. Appl., to appear (DOI: 10.1007/s00041-013-9299-9 published online 19. Nov. (2013)).

[16] M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa, M. Weiner: *Systems of mutually unbiased Hadamard matrices containing real and complex matrices*, Australasian J. Combinatorics, Volume 55, 35–47, (2013).

[17] F. M. de Oliveira Filho, F. Vallentin: *Fourier analysis, linear programming, and densities of distance avoiding sets in* $\mathbb{R}^n$, J. Eur. Math. Soc. **12**, 1417–1428, (2010).

[18] Sz. Révész: *Turán's extremal problem on locally compact abelian groups*, Anal. Math., **37**, Issue 1, 15–50, (2011).

[19] K. F. Roth: *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc., **28**, 104–109, (1953).

[20] T. Sanders: *On Roth's theorem on progressions*, Ann. of Math. (2) **174**, no. 1, 619–636, (2011).

[21] L. A. Székely: *Measurable chromatic number of geometric graphs and sets without some distances in Euclidean space*, Combinatorica **4**, 213–218, (1984).

[22] M. Viazovska: *The sphere packing problem in dimension 8*, http://arxiv.org/pdf/1603.04246v1.pdf