1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$

Felsőbb matematika 1. ZH. 2017-03-21 Neptun: ________ **Név:** ______________________________ **Gyv:** BG KS

A dolgozat feladatainak eredményeit mind erre a papírra kell írni, de a mellékszámításokat tartalmazó többi lap is beadandó! Minden további papírlap jobb felső sarkára mindenki írja föl a saját nevét és a Neptun-kódját! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!

1. *(3 pont)* Írja az I vagy H betűt a négyzetbe aszerint, hogy az állítás igaz vagy hamis! Állításpáronként 1 pont.

a) Ha $\mathbf{A}$ szemiortogonális, akkor az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ és az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{I}$ egyenlőségek legalább egyike fönnáll. ☐
Ha az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális, akkor $\mathbf{A}^2$ is az. ☐

b) Ha $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ és $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. ☐
Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ vagy $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. ☐

c) A valós együtthatós polinomok $\mathbb{R}[x]$ vektorterében az $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ halmaz bázist alkot. ☐
A valós együtthatós hatványsorok

$$\mathbb{R}[[x]] = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

vektorterében az fenti $\mathcal{B}$ halmaz bázist alkot. ☐

2. Válaszoljunk az alábbi kérdése!

a) *(2 pont)* Egészítsük ki az alábbi két képleteket úgy, hogy igazak legyenek:

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esetén $\mathcal{S}(\mathbf{A}\ \ ) = \mathcal{N}(\mathbf{A}\ \ )$

$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ esetén $\mathcal{O}(\mathbf{A}\ \ ) = \mathcal{N}(\mathbf{A}\ \ )$

b) *(1 pont)* Elemi sorműveletek közben nem változik a

sorvektorok ....

oszlopvektorok ....

c) *(2 pont)* Karikázzuk be az alábbi struktúrák közül a testeket, és húzzuk alá azokat, amelyek nem kommutatív gyűrűk:

$\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{F}_5$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$.

d) *(2 pont)* Mit tudunk az alábbi mátrixok sajátértékeiről?

Önadjungált ....

Unitér ....

Nilpotens ....

Ferdén szimmetrikus ....

3. *(3 pont)* Igazoljuk, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n független sajátvektora.

4. *(2 pont)* Írjuk fel *(a)* annak a Givens-forgatásnak és *(b)* annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, mely a $(3, 0, 4, 0)$ vektort az $(5, 0, 0, 0)$ vektorba viszi!

5. *(2 pont)* Legyen $\langle .,. \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ egy kétváltozós függvény. Definíció szerint milyen feltételek fennállása esetén lesz e függvény komplex skaláris szorzás?

6. *(3 pont)* Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, és $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a QR-felbontása, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.

7. *(4 pont)* Adja meg az alábbi **A** mátrix LU-felbontását, és ezt felhasználva oldja meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert, megadva a közbülső lépés eredményét is, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$(0, -1.5, 1)$

8. *(4 pont)* Adja meg a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés képterének és magterének egy-egy bázisát, a leképezés rangját, és mátrixa pszeudoinverze magterének és képterének dimenzióját, ahol

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 5y + 6z, 3x + 5y + 9z, y).$$

9. *(4 pont)* *(a)* Írja fel a négydimenziós térben az $(1, 0, 1, 0)$ és a $(0, 1, 0, 1)$ vektorok által generált $\mathcal{A}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát! *(b)* Írja fel annak a vetítésnek a mátrixát, amely az $\mathcal{A}$ altérre vetít az $(0, 0, 1, 0)$ és a $(0, 0, 0, 1)$ vektorok által kifeszített altér mentén! *(c)* Mi a $(2, 2, 0, 0)$ vektor vetülete a fenti két vetítés esetén?

10. *(4 pont)* A Gram-Schmidt ortogonalizáció segítségével válasszon ki ortonormált bázist az alábbi vektorok által generált altérből: $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(2, 2, 4, 0)$.

11. *(4 pont)* Számítsuk ki a pszeudoinverzét az alábbi A mátrixnak, majd keressük meg a minimális abszolút értékű optimális megoldását az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$