1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$

Felsőbb matematika 2. Pót ZH. 2017-05-11Neptun: ________ **Név:** ______________________________ **Gyv:** BG KS

A dolgozat feladatainak eredményeit mind erre a papírra kell írni, de a mellékszámításokat tartalmazó többi lap is beadandó! Minden további papírlap jobb felső sarkára mindenki írja föl a saját nevét és a Neptun-kódját! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!

1. *(7 pont)* Írja az I vagy H betűt a négyzetbe aszerint, hogy az állítás igaz vagy hamis! Állításpáronként 1 pont.

1) Minden diagonalizálható mátrix diagonális. ☐
Valós elemű mátrixnak van valós sajátértéke. ☐

2) Egy mátrix sajátértékei gyökei a mátrix minimálpolinomjának. ☐
Minden mátrix gyöke a minimálpolinomjának. ☐

3) Egy 3×3-as mátrix különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorai lineárisan függetlenek. ☐
Van olyan unitér mátrix, melynek sajátértéke a -1, 0, és az 1 is. ☐

4) Egy valós négyzetes mátrix szinguláris értékei nemnegatívak. ☐
Ha egy mátrix minden sajátértéke különböző, akkor diagonalizálható. ☐

5) Minden pozitív definit mátrix ortogonálisan diagonalizálható. ☐
Minden valós $\mathbf{A}$ mátrix esetén, az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit. ☐

6) A Jordan-féle normálalak a blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű. ☐
Van olyan valós négyzetes mátrix, ami diagonalizálható, de nem ortogonálisan diagonalizálható. ☐

7) A Jordan-blokkok száma megegyezik a Jordan-láncok számával. ☐
Egy mátrix Jordan-féle normálalakjában egy sajátérték több blokkban is szerepelhet. ☐

2. *(3 pont)* Bizonyítsuk be, hogy hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai azonosak.

3. *(3 pont)* Bizonyítsuk be a szinguláris értékek létezése és egyértelműségéről szóló tételt.

4. *(4 pont)* Legyen $\mathbf{A}$ az a 2017×2017-es mátrix, amelynek főátlójában az elemek rendre $1, 2, \ldots, 2017$, minden más eleme 10^{-6}. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ diagonalizálható és invertálható.

5. *(3 pont)* Bizonyítsa be, hogy az alábbi mátrix pozitív definit és írja fel a Cholesky-felbontást:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

6. *(6 pont)* Diagonalizálja ortogonálisan az alábbi mátrixot és írja fel a spektrálfelbontást:

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

7. *(6 pont)* Írjuk fel a szinguláris érték szerinti felbontását az alábbi mátrixnak, és adjuk meg a polárfelbontást is.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. *(4 pont)* Írjon fel egy olyan 3×3-as mátrixot, amelynek $1, 2, \infty$, és Frobenius-normája egyaránt 5.

9. *(4 pont)* Mi $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja és a minimálpolinomja? Határozza meg azt a legalacsonyabb fokú $p(x)$ polinomot amelyre $p(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$