1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$

Felsőbb matematika 1. Pót ZH. 2017-05-11 **Neptun:** ________ **Név:** ______________________________ **Gyv:** BG KS

A dolgozat feladatainak eredményeit mind erre a papírra kell írni, de a mellékszámításokat tartalmazó többi lap is beadandó! Minden további papírlap jobb felső sarkára írja fel a nevét és a Neptun-kódját! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!

1. *(4 pont)* Írja az I vagy H betűt a négyzetbe aszerint, hogy az állítás igaz vagy hamis! Állításpáronként 1 pont.

a) Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ortogonális mátrixok, akkor $\mathbf{AB}$ is az. ☐
Nilpotens mátrix invertálható. ☐

b) Ha egy komplex mátrix unitér, akkor determinánsa 1 vagy -1. ☐
3 dimenzióban egy síkra tükrözés az ortogonális transzformáció. ☐

c) A valós polinomok vektorteret alkotnak. ☐
A legfeljebb harmadfokú polinomok vektortere 3 dimenziós. ☐

d) Legyen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$. Ekkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. ☐
Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ is négyzetes. ☐

2. Válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a) *(2 pont)* Egészítse ki az alábbi két képleteket úgy, hogy igazak legyenek bármilyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén:

$r(\mathbf{A}\ ) \ = \qquad \mathcal{N}(\mathbf{A}\ )$

$\mathcal{S}(\mathbf{A}\ ) \ = \ \mathcal{O}(\mathbf{A}\ )$

b) *(2 pont)* Mely elemi sorműveletek nem változtatják meg egy valós, négyzetes mátrix determinánsának az abszolút értékét?

c) *(2 pont)* Karikázza be az alábbi struktúrák közül a testeket, és húzzuk alá azokat, amelyek nem kommutatív gyűrűk:

$\mathbb{N} \quad \mathbb{F}_7 \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C} \quad \mathbb{R}[x]$ páratlan számok

d) *(2 pont)* Definiálja a nilpotens mátrix fogalmát! Adjon példát egy ferdén szimmetrikus mátrixra!

3. *(3 pont)* Bizonyítsa be, hogy ortonormált vektorrendszer mindig lineárisan független.

4. *(2 pont)* Írja fel annak a Givens forgatásnak vagy Householder-tükrözésnek a mátrixát, mely az $(1, 8, 4, 0)$ vektort a $(9, 0, 0, 0)$ vektorba viszi!

5. *(3 pont)* Bizonyítsa be, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak.

6. *(4 pont)* Adja meg az alábbi **A** mátrix PLU-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

7. *(4 pont)* Adja meg az $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sorterét, oszlopterét, nullterét!

8. *(4 pont)* *a)* Adja meg az $\{1, \sin x, \cos x\}$ bázisú vektortéren a deriválás, mint lineáris transzformáció **D** mátrixát! *b)* Keresse meg a $\mathbf{Dx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ egyenlet minimális abszolút értékű megoldását! *c)* Deriválja le azt a függvényt, amit az előző megoldás vektora meghatároz!

9. *(5 pont)* Számítsa ki a QR-felbontást: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. *(3 pont)* Számítsa ki a pszeudoinverzét a fenti mátrixnak (segítség lehet az előző feladatban kiszámolt QR-felbontás).