1. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, és adjunk meg Jordan-bázist. Határozzuk meg $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátrixokat.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Egy 10×10 - es $\mathbf{A}$ mátrixnak a λ egy 10 - szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. Az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ nullterének dimenziója $k = 1, 2, 3, 4$ esetén rendre $5, 8, 9, 10$. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját.

3. Egy 10×10 - es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre $8, 6, 5, 4$. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre $7, 6$. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját.

4. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

Határozzzuk meg $\mathbf{A}$ minimálpolinomját. Adjuk meg azt a legkisebb fokú p polinomot, amelyre $p(\mathbf{A}) = \sin \mathbf{A}$.

5. Legyen $\mathbf{A}$ egy olyan $n \times n$ - es mátrix a komplex test felett, amelyre $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathbf{A}$ diagonalizálható.

6. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok reducibilisek vagy irreducibilisek. A reducibilisekhez keressük meg a permutációs mátrixot is.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. melyek primitívek az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$