Felsőbb matematika **2. gyakorlat** **2017. február 23 - március 3.**

1. Lineáris transzformációk-e az alábbi leképezések? Ha igen, akkor írjuk fel a mátrixukat a $[1, 2]$, $[3, 0]$ bázisban! $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x - 3y \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y + 1 \\ x - 3y - 1 \end{bmatrix}.$$

2. Jelölje S a síknak az $y = x$ egyenesre való tükrözését, T pedig az origó körüli $+60°$-os forgatást. Írja fel S és T mátrixát a standard bázisban. Jelölje T_1 a síknak az x tengelyre való tükrözését, T_2 a síknak az y tengelyre való tükrözését, továbbá S_1 illetve S_2 a síknak az x illetve y tengelyre való merőleges vetítését. Milyen geometriai transzformációknak felenek meg a $T_1 + T_2$, $S_1 + S_2$ összegek, illetve a T_1T_2, S_1S_2 szorzatok?

3. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát a standard bázisban, amely a teret az $x+y+z = 0$ egyenletű síkra merőlegesen vetíti!

4. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely a teret az $x+2y-z = 0$ egyenletű sík mentén a $[0, 1, 3]$ vektor által kifeszített 1-dimenziós térre vetíti! Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely a teret a $[0, 1, 3]$ vektor által kifeszített 1-dimenziós altér mentén az $x + 2y - z = 0$ egyenletű síkra vetíti! Milyen geometriai transzformáció lesz a két vetítés összege? Írjuk fel mindkét vetítés képterét és magterét!

5. Határozzuk meg a $[3, 0, -2, 1]$ vektornak az $[1, 0, 3, -1]$ és a $[-1, 1, 0, 2]$ vektorok által kifeszített altérre eső merőleges vetületét! Bontsuk fel a fenti vektort egy a megadott altérre merőleges, és egy az altérrel párhuzamos vektorok összegére!

6. Határozzuk meg az alábbi lineáris leképezés képterének és magterének egy bázisát!

   $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2, 2x_2 + 2x_3)$.

7. Legyen az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   a standard bázisban egy lineáris transzformáció mátrixa. Írjuk fel ugyanennek a lineáris transzformációnak a mátrixát az $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ bázisban.

8. Adjuk meg az

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

   egyenletrendszer minimális abszolútértékű optimális megoldását!