1. Oldjuk meg az első egyenletrendszert $\mathbb{R}$ fölött, a másodikat $\mathbb{F}_2$, illetve $\mathbb{F}_3$ fölött:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + x_5 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 9 \\ x_1 \qquad - \ \ x_3 \qquad + x_5 &= 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + x_5 &= 5 \end{aligned}\ , \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}\ .$$

2. Tekintsük $\mathbb{R}^4$ azon $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ elemeit, melyekre

$$a)\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0\ , \quad b)\ x_1x_3 = x_2x_4\ , \quad c)\ x_3 \geq x_4\ ,$$

$$d)\ \begin{aligned} 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 10x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned} \quad e)\ x_1 + 3x_2 = 4\ , \quad f)\ \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

A fenti részhalmazok közül melyek alkotnak alteret $\mathbb{R}^4$ - ben?

3. Az alábbi $\mathbb{R}^3$ - beli vektorok mely nemüres részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?
$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Az $\mathbb{R}^3$ alábbi $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{c})$, illetve $\mathrm{Span}(\mathbf{b},\mathbf{c})$ alterei közül melyikben van benne a $\mathbf{d}$ vektor? Keressen bázist a $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$ alterekben, és írja fel a kimaradó vektor e bázisbeli koordinátás alakját is!

4. Határozza meg az alábbi mátrixok nullterét, sorterét, oszlopterét, ezen alterek egy bázisát, valamint számítsa ki a mátrixok rangját.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, majd ezt felhasználva az összes megoldását!

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + x_5 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 9 \\ x_1 \qquad - \ \ x_3 \qquad + x_5 &= 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + x_5 &= 5 \end{aligned}\ , \quad \begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + \ \ x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad &= 5 \end{aligned}\ , \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}\ .$$

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 11 & -16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Adjuk meg az alábbi mátrixok LU-felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix},$$

8. Adjuk meg az alábbi mátrixok PLU-felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,2,3),\ (1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7,3,3),\ (8,1,2),\ (4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

10. Határozzuk meg az alábbi mátrixok bázisfelbontását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

11. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Legyen A olyan 2017×2017-es mátrix, amelyre $\det(A^T) = \det(-A)$. Mennyi $\det(A)$?

13. Legyenek A, B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Igaz-e, hogy $\det(A^T B) = \det(BA)$? Igaz-e, hogy $\det^4(-A) = \det(A^4)$? Igaz-e, hogy ha $\det(A) = 1$, akkor $\det(A^{-1}B) = \det(AB)$? Van-e olyan A mátrix, amelyre $\det(A^T A) = 1$, viszont $\det(A) \neq 1$?