Kalkulus 1

Andai Attila*

2015. május 14.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő számtalan hiba kijavításáért és értékes megjegyzéseiért, *Joó Attilának*, aki felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában, valamint *Lovas Attilának* a függelék gondos átnézéséért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\overset{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \overset{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2015. március 7.
Andai Attila

1 Halmazelméleti alapok

1.1. Logikai alapok

A mai modern matematika nagy része, többek között az analízis is, felépíthető a halmazelméletből. Nem célunk a halmazelmélet axiómáiból teljesen részletesen felépíteni az analízist, de az axiómáktól a definíciókig, tételekig vezető utat szeretnénk világossá tenni.

A halmazelméletet megelőző elméleteket, mint például a logikát vagy a formális nyelvek elméletét egyáltalán nem említjük, mindössze a jelölések egységesítése végett teszünk néhány megjegyzést velük kapcsolatban.

A halmazelméletben definiálatlan alapfogalomként szerepel a *halmaz* és a *halmaz elemének lenni* kifejezés. Tehát bármely A és B halmaz esetén értelmes az a kijelentés, hogy A *eleme a* B *halmaznak*. Az „A eleme a B halmaznak" kijelentést az $A \in B$ szimbólummal jelöljük.

A halmazelmélet axiómáinak az áttekintéséhez szükséges az alapvető logikai jelek ismerete.

A változójelekre tetszőleges betűt, illetve jelet fogunk használni a továbbiakban. Adott p és q állítás esetén az alábbi alapvető logikai kapcsolókat értelmezzük:

$\neg p$: p *tagadása*, *negációja*;
$p \vee q$: p *vagy* q;
$\exists$: *létezik* szimbólum.

1.1. Definíció. A halmazelmélet keretein belül *formulának* nevezzük a karaktersorozatok azon legszűkebb $F_\in$ családjának elemeit, melyre teljesül, hogy

1. minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i \in x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
2. minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i = x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
3. minden $p, q \in F_\in$ és x_i változójel esetén

$$\neg(p), (p) \vee (q), \exists x_i(p) \in F_\in$$

teljesül.

1.2. Definíció. A logikai jelek felhasználásával a következő logikai műveleteket definiáljuk. Legyen p, q formula és x_i változójel.

1. $(p) \wedge (q)$: p *és* q, ha $\neg((\neg(p)) \vee (\neg(q)))$;
2. $(p) \to (q)$: p*-ből* q *következik*, ha $(\neg(p)) \vee (q)$;
3. $(p) \leftrightarrow (q)$: p *és* q *ekvivalensek*, ha $((p) \to (q)) \wedge ((q) \to (p))$;
4. $\forall x(p)$: *minden* x *esetén* p teljesül, ha $\neg(\exists x(\neg(p)))$.

Minden $p, q \in$ formula és x_i változójel esetén

$$(p) \wedge (q), (p) \neq (q), (p) \to (q), (p) \leftrightarrow (q), \forall x_i(p)$$

is formula. Amennyiben a formulákon belül a zárójelezés az értelmezést nem befolyásoló módon elhagyható, akkor az áttekinthetőség kedvéért elhagyjuk.

A továbbiakban $x \notin y$ jelöli a $\neg(x \in y)$ formulát, valamint $x \neq y$ a $\neg(x = y)$ formulát.

1.3. Definíció. Egy adott formula lehet *igaz* (i), vagy *hamis* (h). Adott p és q formula igaz vagy hamis formula esetén az alábbi *igazságtáblázaban* foglaljuk össze $\neg p$ és $p \vee q$ igaz vagy hamis voltát.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$
i	i	h	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	h	i	h

A halmazelmélet axiómái megmondják, hogy mely formulák biztosan igazak. Ezekből az alap formulákból (axiómákból) vezetünk le később további formulákat (tételeket).

Ezek alapján levezethető a többi logikai művelet igazságtáblája.

1.1. Tétel. *Legyen p és q formula. Ekkor a bevezetett logikai műveletek igazságtáblája az alábbi.*

p	q	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

Bizonyítás. A definícióból elemi számolással adódik.

1.4. Definíció. A p és q formulákat *ekvivalensnek* nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos, azaz, ha $p \leftrightarrow q$ igaz, ennek jele $p \equiv q$.

1.2. Tétel. *A p, q és r formulára*

$$\begin{array}{lll}
\neg(\neg p) \equiv p & \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) & \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \\
p \wedge p \equiv p & p \wedge q \equiv q \wedge p & p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\
p \vee p \equiv p & p \vee q \equiv q \vee p & p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\
 & p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\
 & & p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)
\end{array}$$

teljesül.

Bizonyítás. A $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ azonosságot az alábbi igazságtábla bizonyítja.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$
i	i	i	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h	h
i	h	i	h	i	i	i
h	h	i	h	h	h	h
i	i	h	i	h	i	i
h	i	h	h	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h

A többi azonosság is hasonló módon származtatható igazságtáblázatokból.

1.2. Elemi halmazműveletek

1.5. Definíció. Adott A, B halmaz esetén $A \cup B$ jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v \ \ (v \in A \cup B \ \leftrightarrow \ (v \in A \ \vee \ v \in B))$$

teljesül, valamint A *és* B *uniójának* nevezzük.

1.6. Definíció. Adott A, B halmaz esetén $A \cap B$ jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v \ \ (v \in A \cap B \ \leftrightarrow \ (v \in A \ \wedge \ v \in B))$$

teljesül, valamint A *és* B *metszetének* nevezzük.

1.7. Definíció. Adott A halmaz esetén $\mathcal{P}(A)$ halmaz jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v \ \ (v \in \mathcal{P}(A) \ \leftrightarrow \ v \subseteq A)$$

teljesül, valamint az A *hatványhalmazának* nevezzük.

1.8. Definíció. Adott A, B halmaz esetén az $\{x \in A|\ x \notin B\}$ halmazt A *és* B *különbségének* nevezzük, ennek jele $A \setminus B$.

1.3. Tétel. *Minden A, B, C halmazra az alábbiak teljesülnek.*

$$\begin{array}{llll} A \cap \emptyset = \emptyset & A \cap A = A & A \cap B = B \cap A & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup \emptyset = A & A \cup A = A & A \cup B = B \cup A & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{array}$$

Bizonyítás. A tételben szereplő állítások elemi számolással visszavezethetők a 1.2 tételben szereplő logikai összefüggésekre.

1.4. Tétel. *(Cantor-tétel.) Nem létezik olyan halmaz, mely minden halmazt tartalmaz.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen x az a halmaz, mely minden halmazt tartalmaz és legyen $y \triangleq \{z \in x|\ z \notin z\}$. Ekkor mind $y \in y$, mind $y \notin y$ ellentmondáshoz vezet.

1.3. Relációk

1.9. Definíció. Adott x, y halmazok esetén az

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

1.5. Tétel. *Minden x, y, a, b halmazra $(x, y) = (a, b) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $x = a$ és $y = b$, akkor nyilván $(x, y) = (a, b)$. Tegyük fel, hogy $(x, y) = (a, b)$, vagyis $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ teljesül. Ekkor $\{x\}, \{x, y\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a\}$, akkor $x = y = a$, valamint $a = b$, tehát ekkor $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a, b\}$, akkor $x = a$, valamint $\{a, y\} = \{a, b\}$ miatt $y = b$, vagy $y = a$, ami ugyancsak azt jelenti, hogy $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a, b\}$, akkor $x = a = b$ és $y = b$, tehát $x = a$ és $y = b$.

1.10. Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt.

1.11. Definíció. Adott X, Y halmazok esetén a Descartes-szorzatuk tetszőleges részhalmazát *relációnak* nevezzük, azaz R reláció, ha $R \subseteq X \times Y$. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

- *értelmezési tartománya*

$$\operatorname{Dom} R \triangleq \{x \in X|\ \exists y \in Y : (x, y) \in R\};$$

– *értékkészlete*

$$\operatorname{Ran} R \stackrel{\triangle}{=} \{y \in Y |\ \exists x \in X : (x, y) \in R\};$$

– *inverze*

$$\overset{-1}{R} \stackrel{\triangle}{=} \{(y, x) \in Y \times X |\ (x, y) \in R\};$$

– általi *képe a $H \subseteq X$ halmaznak*

$$R(H) \stackrel{\triangle}{=} \{y \in Y |\ \exists x \in H : (x, y) \in R\}\,;$$

– *megszorítása* vagy *leszűkítése* a $H \subseteq X$ halmazra

$$R|_H \stackrel{\triangle}{=} R \cap (H \times Y).$$

Az $R_1 \subseteq X \times Y$ és $R_2 \subseteq Y \times Z$ reláció *kompozíciója*

$$R_2 \circ R_1 \stackrel{\triangle}{=} \{(x, z) \in X \times Z |\ \exists y \in Y :\ (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

Nyilván minden $R \subseteq X \times Y$ relációra minden $H \subseteq X$ esetén

$$R(H) = \operatorname{Ran} R|_H$$

teljesül.

1.12. Definíció. Tetszőleges X halmaz esetén

$$\mathrm{id}_X \stackrel{\triangle}{=} \{(x, x) \in X \times X | x \in X\}$$

jelöli az *identitásrelációt*.

1.4. Függvények

1.13. Definíció. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció *függvény*, ha

$$\forall x \forall y \forall y' (((x, y) \in R \wedge (x, y') \in R) \to y = y')$$

teljesül.

Az $f \subseteq X \times Y$ függvényre a továbbiakban az $f : X \twoheadrightarrow Y$ jelölést használjuk. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény értelmezési tartománya $\operatorname{Dom} f \subseteq X$ és értékkészlete $\operatorname{Ran} f \subseteq Y$. Az f függvényt, mint hozzárendelési szabályt gyakran az

$$f : X \twoheadrightarrow Y \quad x \mapsto f(x)$$

alakban írjuk fel. A $H \subseteq X$ esetén a függvény leszűkítése

$$f|_H : H \twoheadrightarrow Y \quad x \mapsto f(x).$$

Abban az esetben, amikor az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvényre $\operatorname{Dom} f = X$ teljesül az $f : X \to Y$ jelölést fogjuk használni. Tehát az $f : X \to Y$ jelentése az, hogy f függvény és $\operatorname{Dom} f = X$.

A függvények halmazára bevezetjük az $\mathcal{F}(X, Y) = \{f \subseteq X \times Y\ | f \text{ függvény},\ \operatorname{Dom} f = X\}$ jelölést, valamint megemlítjük, hogy szokásos még az X^Y jelölés is erre a függvényhalmazra, de egészen kivételes esetektől eltekintve ezt nem használjuk.

1.14. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
- *injektív*, ha $\forall x, x' \in X : \ (f(x) = f(x') \to x = x')$;
- *szürjektív*, ha $\operatorname{Ran} f = Y$;
- *bijektív*, ha $\operatorname{Dom} f = X$, injektív és szürjektív.

Az $f : X \to X$ bijekciót az X halmaz *permutációjának* is nevezzük.

1.6. Tétel. *Ha f függvény, akkor $\overset{-1}{f}$ pontosan akkor függvény, ha f injektív.*

Bizonyítás. Legyen $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény. Az f függvény injektivitása azt jelenti, hogy

$$\forall x, x' \in X \ \forall y \in Y : \ ((x, y) \in f \wedge (x', y) \in f) \to x = x'.$$

Az $\overset{-1}{f}$ reláció függvényszerűsége azt jelenti, hogy

$$\forall x, x' \in X \ \forall y \in Y : \ ((y, x) \in \overset{-1}{f} \wedge (y, x') \in \overset{-1}{f}) \to x = x'.$$

Vagyis a két kijelentés ekvivalens egymással.

1.15. Definíció. Ha f injektív függvény, akkor az $\overset{-1}{f}$ függvényt f^{-1} jelöli és ez az f *függvény inverze*. Amennyiben egy függvénynek létezik inverze, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *invertálható*.

1.7. Tétel. *Függvények kompozíciója függvény.*

Bizonyítás. Legyen $f : X \twoheadrightarrow Y$ és $g : Y \twoheadrightarrow Z$, valamint tegyük fel, hogy $(x, z_1), (x, z_2) \in (g \circ f)$. A relációk kompozíciójának az értelmezése alapján létezik olyan $y_1, y_2 \in Y$, melyre $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$, $(y_1, z_1) \in g$ és $(y_2, z_2) \in g$ teljesül. Mivel f függvény, így $y_1 = y_2$, tehát az $(y_1, z_1) \in g$ és a $(y_2, z_2) \in g$ relációkból g függvényszerűségének a felhasználásával $z_1 = z_2$ adódik, vagyis $g \circ f$ függvény.

Tehát az $f : X \twoheadrightarrow Y$ és $g : Y \twoheadrightarrow Z$ függvény kompozícióját úgy értelmezzük, mint az f és g reláció kompozícióját. Ekkor $g \circ f$ értelmezési tartománya

$$\operatorname{Dom}(g \circ f) = \{x \in X \ | x \in \operatorname{Dom} f, \ f(x) \in \operatorname{Dom} g\}.$$

A függvénykompozícót a

$$g \circ f : X \twoheadrightarrow Z \qquad x \mapsto g(f(x))$$

alakban is írhatjuk.

1.8. Tétel. *Bármely $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, $g \in \mathcal{F}(Y, Z)$ és $h \in \mathcal{F}(Z, V)$ függvényre*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(x, v) \in h \circ (g \circ f)$. Ekkor létezik olyan $z \in Z$, hogy $(x, z) \in (g \circ f)$ és $(z, v) \in h$. Amiből következik, hogy létezik olyan $y \in Y$, hogy $(x, y) \in f$ és $(y, z) \in g$. Ekkor $(y, z) \in g$ és $(z, v) \in h$ miatt $(y, v) \in h \circ g$, valamint $(x, y) \in f$ miatt $(x, v) \in (h \circ g) \circ f$. Az indentitásfüggvényre vonatkozó azonosság nyilvánvalóan adódik az identitásfüggvény definíciójából.

A megszokott matematikai műveletek is függvények, melyek főbb tulajdonságaikat az alábbiakban definiáljuk.

1.16. Definíció. Valamilyen X halmaz esetén az $X \times X \to X$ függvényeket gyakran *műveletnek* nevezzük, és jelölésükre általában az infix módot használjuk. Vagyis például az $+ : X \times X \to X$ művelet és $x, y \in X$ esetén az $x + y \triangleq +(x, y)$ jelöléssel élünk.

- Azt mondjuk, hogy a $+$ művelet *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x + y = y + x$.
- A $+$ művelet *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A $+$ művelet *egységelemes*, ha $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = e + x = x$.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ egységelemes művelet *inverzelemes* ha

  $$\forall x \in X : \exists x' \in X : x + x' = e \ \wedge \ x' + x = e,$$

  ahol e jelöli az egységelemet.
- A $\cdot : X \times X \to X$ művelet *disztributív a $+$ műveletre nézve*, ha $\forall x, y, z \in X$ elemre

  $$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

1.9. Tétel. *(Cantor-tétel.) Egyetlen A halmaz esetén sem létezik $f : A \to \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen $f : A \to \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény. Legyen $Y \triangleq \{x \in A | \ x \notin f(x)\}$. Ekkor létezik $x_0 \in A$, melyre $f(x_0) = Y$. Ekkor az $x_0 \in Y$ feltevés és az $x_0 \notin Y$ feltevés is ellentmondáshoz vezet.

1.5. Halmazrendszerek

1.17. Definíció. Legyen I és A nem üres halmaz. Az $f : I \to \mathcal{P}(A)$ függvényt *halmazrendszernek* nevezzük, minden $i \in I$ esetén az $A_i \triangleq f(i)$ jelölés használjuk a függvény értékére, valamint az I halmazt *indexhalmaznak* nevezzük. Az f függvényre pedig gyakran az $(A_i)_{i \in I}$ jelölést használjuk.

1.18. Definíció. Legyen $I, A \neq \emptyset$, és $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer uniója*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A | \exists i \in I : \ x \in A_i\}$$

és *metszete*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A | \forall i \in I : \ x \in A_i\}.$$

1.19. Definíció. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer Descartes-szorzatán* a

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \ \middle| \ \forall i \in I : \ f(i) \in A_i \right\}$$

halmazt értjük. Adott $f \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén az $f_k \triangleq f(k)$ jelölést is fogjuk használni.

A Descartes-szorzat elemei tehát az indexhalmazon értelmezett speciális függvények. Abban az esetben, amikor az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszerre minden $i, j \in I$ esetén $A_i = A_j$ teljesül, akkor az $A = A_i$ jelölést bevezetve a halmazrendszer Descartes-szorzatára

$$\prod_{i \in I} A = \{f : I \to A\} = \mathcal{F}(I, A)$$

adódik, amit gyakran az A^I szimbólummal fogunk jelölni.

1.10. Tétel. *Legyen A_x, A_y tetszőleges halmaz és $I = \{x, y\}$. Ekkor a*

$$\varphi : \prod_{i \in I} A_i \to A_x \times A_y \quad f \mapsto (f(x), f(y))$$

leképezés bijekció.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Ekkor $(\alpha(x), \alpha(y)) = (\beta(x), \beta(y))$, amiből $\alpha(x) = \beta(x)$ és $\alpha(y) = \beta(y)$ adódik, ami pedig azt jelenti, hogy $\alpha = \beta$. Vagyis a φ leképezés injektív. Ha $(c_x, c_y) \in A_x \times A_y$, akkor az $f = \{(x, c_x), (y, c_y)\} \in \prod_{i \in I} A_i$ függvényre $\varphi(f) = (c_x, c_y)$ teljesül, vagyis φ szürjektív.

Ezen tétel értelmében a halmazrendszer szorzata tekinthető a korábban értelmezett Descartes-szorzat általánosításának, ez indokolja az elnevezést.

1.11. Tétel. *Ha $(A_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall i \in I (A_i \neq \emptyset)$, akkor $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*

1.20. Definíció. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer.
- Adott $k \in I$ esetén a

$$\mathrm{pr}_k : \prod_{i \in I} A_i \to A_k \qquad x \mapsto x_k$$

  függvényt *a k-adik projekció függvénynek* nevezzük.
- Adott $a \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén a

$$\mathrm{in}_{a,k} = \left\{ (x, u) \in A_k \times \prod_{i \in I} A_i \;\middle|\; u_k = a,\ \forall i \in I \setminus \{k\} : u_i = a_i \right\}$$

  függvényt *a k koordináta a ponthoz tartozó inklúzió függvénynek* nevezzük. Vagyis $a \in \prod_{i \in I} A_i$, $k, i \in I$ és $x \in A_k$ esetén

$$(\mathrm{in}_{a,k}(x))_i = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad i = k; \\ a_k, & \text{ha} \quad i \neq k. \end{cases}$$

1.6. Rendezések

1.21. Definíció. Az $R \subseteq X \times X$ reláció *homogén reláció az X halmaz fölött.* Néhány fontos lehetséges tulajdonsága:
- *reflexív*, ha $\forall x \in X ((x, x) \in R)$;
- *tranzitív*, ha $\forall x, y, z \in X (((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \to (x, z) \in R)$;
- *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X ((x, y) \in R \to (y, x) \in R)$;
- *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X (((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \to x = y)$.

1.12. Tétel. *Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció.*
1. *Az R pontosan akkor reflexív, ha $\mathrm{id}_X \subseteq R$.*
2. *Az R pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.*
3. *Az R pontosan akkor szimmetrikus, ha $\overset{-1}{R} = R$.*

4. Az R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}\, R}$.

Bizonyítás. A definíciók közvetlen következménye.

1.22. Definíció. A reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív relációkat a *rendezéseknek* nevezzük. Ha $\leq$ rendezés az A halmaz felett, akkor az $(A, \leq)$ pár neve: *rendezett halmaz.*

A rendezéseket általában a $\leq, \geq, \preceq, \succeq$ szimbólummal jelöljük. A továbbiakban $(x, y) \in \leq$ helyett az $x \leq y$ jelölést használjuk, és bevezetjük az $x < y$ rövidítést az $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$ formula helyett.

1.23. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz.

- Az $X \subseteq A$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $x \in A$ elemet, amelyre $\forall x' \in X\ x' \leq x$ $(x \leq x')$ teljesül.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az X halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az $X \subseteq A$ halmaz *korlátos*, ha X felülről és alulról is korlátos.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük X minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az X halmaznak.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az X halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup X$, illetve $\inf X$.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *maximális* (illetve *minimális*) elemének nevezünk minden olyan $x \in X$ elemet, amelyre teljesül az, hogy X-nek nem létezik x-nél nagyobb (illetve kisebb) eleme.

Rendezett halmaz egy részhalmazának legfeljebb egy legnagyobb (illetve legkisebb) eleme létezhet, de lehet több maximális (illetve minimális) eleme.

1.24. Definíció. Az $(A, \leq)$ pár *lineárisan rendezett halmaz*, ha olyan $(A, \leq)$ rendezett halmaz, hogy A bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, azaz $\forall x, y \in A : (x \leq y \vee y \leq x)$ teljesül.

1.13. Tétel. *Legyen $(A, \leq)$ lineárisan rendezett halmaz, és $X \subseteq A$.*

1. Az $y \in A$ elemre $\sup X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y felső korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A :\ (z < y \to (\exists x \in X : z < x))$ teljesül.

2. Az $y \in A$ elemre $\inf X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y alsó korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A :\ (z > y \to (\exists x \in X : z > x))$ teljesül.

Bizonyítás. Az első állítást bizonyítjuk, a második hasonló gondolatmentettel igazolható.
$\Rightarrow$ Legyen $y = \sup X$. Ekkor y definíció szerint felső korlátja az X halmaznak. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists z \in A$, melyre $z < y$ és minden $x \in X$ esetén $x \leq z$. Ekkor z felső korlátja az X halmaznak, és kisebb mint y, vagyis nem $y = \sup X$ az X halmaz legkisebb felső korlátja, ami ellentmondás.
$\Leftarrow$ Legyen y olyan felső korlátja az X halmaznak, melyre $\forall z \in A :\ (z < y \to (\exists x \in X : z < x))$ teljesül. Ekkor y a legkisebb felső korlát, vagyis $y = \sup X$.

1.25. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz. Az $(A, \leq)$ párt *jólrendezett halmaznak*, magát a $\leq$ relációt pedig jólrendezésnek nevezzük, ha A minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme.

A jólrendezett halmaz definíciójából azonnal következik, hogy minden jólrendezett halmaz lineárisan rendezett és nem az üres halmaz.

1.26. Definíció. Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, y \in A$ esetén definiáljuk az alábbi halmazokat.

$$[x, y] = \{z \in A |\ x \leq z \leq y\}$$
$$[x, y[= \{z \in A |\ x \leq z < y\}$$
$$]x, y] = \{z \in A |\ x < z \leq y\}$$
$$]x, y[= \{z \in A |\ x < z < y\}$$

A fenti módon meghatározott halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

1.27. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A, \leq)$ rendezett halmaz *induktívan rendezett halmaz*, ha minden olyan részhalmaza felülről korlátos, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

1.14. Tétel. *(Kuratowski–Zorn-lemma.) Minden induktívan rendezett halmaznak létezik maximális eleme.*

1.7. Ekvivalenciarelációk

1.28. Definíció. A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat *ekvivalenciarelációknak* nevezzük.

Az ekvivalenciarelációkat a $\approx, \sim$ szimbólummal jelöljük, továbbá $(x, y) \in \approx$ helyett az $x \approx y$ jelölést használjuk.

1.29. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az $X \subseteq A$ halmazt *ekvivalenciaosztálynak* nevezzük, ha

1. $X \neq \emptyset$;
2. $\forall x, y \in X : x \approx y$;
3. $\forall x \in X, \forall y \in A : (x \approx y \to y \in X)$.

1.15. Tétel. *Legyen A tetszőleges halmaz és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor minden $a \in A$ elemre az*

$$a/\approx \stackrel{\triangle}{=} \{x \in A |\ a \approx x\}$$

halmaz ekvivalenciaosztály, és az ekvivalenciaosztályok halmazt alkotnak

$$A/\approx \stackrel{\triangle}{=} \{X \in \mathcal{P}(A) |\ \exists a \in A : \ X = a/\approx\}.$$

Továbbá az $A/\approx$ ekvivalenciaosztályok diszjunkt halmazrendszert alkotnak, azaz

$$\forall x, y \in A/\approx:\ x \neq y \to x \cap y = \emptyset, \quad \textit{és} \quad \cup \{x |\ x \in A/\approx\} = A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges halmaz, $a \in A$ és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Mivel $a \approx a$, ezért $a \in a/\approx$, vagyis $a/\approx \neq \emptyset$. Ha $x, y \in a/\approx$, akkor $x \approx a$, $y \approx a$, amiből a $\approx$ reláció tranzitivitása miatt $x \approx y$ adódik. Ha $x \in a/\approx$ és $y \in A$ olyan elem, melyre $x \approx y$ teljesül, akkor $y \approx a$ a $\approx$ reláció tranzitivitása miatt, vagyis $y \in a/\approx$.
Legyen $x/\approx, y/\approx \in A/\approx$ olyan, hogy $x/\approx \neq y/\approx$. Tegyük fel, hogy $c \in (x/\approx) \cap (y/\approx)$. Ekkor $x \approx c$ és $y \approx c$, vagyis $x \approx y$, amiből a $\approx$ reláció tranzitivitásának felhasználásával az $x/\approx = y/\approx$ ellentmondás adódik. Tehát feltételezésünkkel ellentétben nem létezhet olyan c elem, melyet az $x/\approx$ és az $y/\approx$ halmaz is tartalmaz, így $(x/\approx) \cap (y/\approx) = \emptyset$.
Ha $x \in A/\approx$, akkor $x \subseteq A$, vagyis az A részhalmazainak az egyesítése nyilván részhalmaza az A halmaznak, ezért csak a $A \subseteq \cup\{x |\ x \in A/\approx\}$ tartalmazást kell igazolni. Ha $a \in A$, akkor nyilván $a \in a/\approx \in A/\approx$, vagyis $a \in \cup\{x |\ x \in A/\approx\}$.

1.8. Valós számok

1.16. Tétel. *Létezik olyan* $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *nyolcas, ahol*

1. $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$;
2. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ *függvény,* $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ *függvény a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a + 0 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} & a + (-a) = 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) + c = a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a + b = b + a \end{array}$$

   tulajdonságokkal;
3. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ *függvény,* $^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^{-1}$ *függvény a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \cdot 1 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & a \cdot a^{-1} = 1 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \cdot b = b \cdot a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array}$$

   tulajdonságokkal;
4. $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *részhalmaz, melyre minden* $(a, b) \in \leq$ *esetén az* $a \leq b$ *jelölést használjuk, és mely rendelkezik a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \leq a \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ b \leq a) \ \to \ a = b \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ b \leq c) \ \to \ a \leq c \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \leq b \ \vee \ b \leq a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b) \ \to \ a + c \leq b + c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ 0 \leq c) \ \to \ a \cdot c \leq b \cdot c \end{array}$$

   tulajdonságokkal;
5. *továbbá*

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} : \ ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : \ a \leq K)) \ \to \\ &\to \ (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : \ a \leq s) \ \wedge \ (\forall s' \in \mathbb{R} : \ ((\forall a \in A : \ a \leq s') \ \to \ s \leq s'))))) \end{aligned}$$

   teljesül.

Továbbá az 1.–4. tulajdonságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *struktúrákat nevezzük rendezett testeknek, valamint ha az 5. is teljesül egy rendezett testre, akkor azt teljesen rendezett testnek nevezzük.*

A szorzás $\cdot$ jelét általában nem írjuk ki, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ esetén ab jelöli az $a \cdot b$ elemet. Adott $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a - b$ jelöli az $a + (-b)$ elemet. Az $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén az ab^{-1} elemre gyakran az $a : b$ vagy az $\frac{a}{b}$ jelölést használjuk. Továbbá minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a < b$ vagy $b > a$ azt jelöli, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$.

1.30. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Az A halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $C \in \mathbb{R}$ elemet, amelyre $\forall a \in A$ $a \leq C$ $(C \leq a)$ teljesül.
- Az A halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az A halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az A halmaz *korlátos*, ha A felülről és alulról is korlátos.

– Az A halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük A minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az A halmaznak.
– Az A halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az A halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup A$ (illetve $\inf A$).

A rendezett testekben (így a valós számok körében is) érvényes számolási szabályokat foglalja össze a következő tétel.

1.17. Tétel. *Legyen* $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ *rendezett test. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in K: \quad 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x \in K: \quad (-1) \cdot x = -x$
3. $\nexists x \in K: \quad 0 \cdot x = 1$
4. $\forall x, y \in K: \quad x < y \ \rightarrow -y < -x$
5. $(-1)^2 = 1$
6. $\forall x, y, z \in K: \quad (x < y \ \wedge \ z < 0) \ \rightarrow \ yz < xz$
7. $\forall x \in K: \quad 0 \leq x^2$
8. $0 < 1$
9. $\forall x, y \in K: \quad 0 < x < y \ \rightarrow 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

Bizonyítás.
1. Legyen $x \in K$ tetszőleges. Ekkor $0 + 0 = 0$ és a disztributivitás miatt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

amihez hozzáadva a $-(0 \cdot x)$ elemet $0 \cdot x = 0$ adódik.
2. Ha $x \in K$ akkor az 1. pont alapján $0 \cdot x = 0$, ezért

$$\begin{aligned}(-1) \cdot x = 0 + (-1) \cdot x = -x + x + (-1) \cdot x = -x + 1 \cdot x + (-1) \cdot x = \\ = -x + (1 + (-1))x = -x + 0 \cdot x = -x + 0 = -x.\end{aligned}$$

3. Az 1. pont nyilvánvaló következménye.
4. Ha $x, y \in K$ és $x < y$, akkor az egyenlőtlenséghez hozzáadva a $-x - y$ számot $-y < -x$ adódik.
5. A

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = (1 + (-1) + (-1)) \cdot (-1) = -1 + (-1)^2 + (-1)^2$$

egyenlet elejéhez és végéhez hozzáadva a $-(-1)^2$ számot

$$0 = -1 + (-1)^2,$$

majd az 1 számot

$$1 = (-1)^2$$

adódik.
6. Legyen $x, y, z \in K$ olyan, melyre $x < y$ és $z < 0$ teljesül. A 4. pont alapján ekkor $0 < -z$, vagyis $-zx < -zy$, amiből megint a 4. pont alapján $zy < zx$ következik.
7. Legyen $x \in K$. Ha $0 \leq x \in K$, akkor az egyenlőtlenséget megszorozva az x pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik. Ha $x \leq 0$, akkor $0 \leq -x$, amit megszorozva a $-x$ pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik.
8. A 7. pont alapján nyilvánvaló.
9. Legyen $x \in K$ olyan, melyre $0 < x$ teljesül. Ha $\dfrac{1}{x} \leq 0$ teljesülne, akkor ezt megszorozva az x számmal $1 \leq 0$ ellentmondás adódna, tehát $0 < \dfrac{1}{x}$. Ha $x, y \in K$ olyan, melyre $0 < x < y$ teljesül, akkor az $x < y$ egyenlőtlenséget megszorozva az $\dfrac{1}{xy}$ számmal $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$ adódik.

1.18. Tétel. *Rendezett testben minden elem négyzete pozitív.*

Bizonyítás. A 1.17 tétel 7. pontja éppen ez volt.

1.31. Definíció. Jelöljön ∞ és $-\infty$ két olyan halmazt, melyre $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ teljesül. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt *bővített valós számoknak* nevezzük, a ∞ elemet *végtelennek*, a $-\infty$ elemet pedig *mínusz végtelennek* mondjuk. A valós számok halmazán értelmezett $\leq$ reláció bővítése

$$\overline{\leq} \triangleq \leq \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{-\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$

A $+$ és $\cdot$ művelet az alábbi módon bővítjük.

- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + \infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$, továbbá legyen $\infty + \infty \triangleq \infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + (-\infty) \triangleq (-\infty) + a \triangleq -\infty$, továbbá legyen $-\infty + (-\infty) \triangleq -\infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$a \cdot \infty \triangleq \infty \cdot a \triangleq \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad a > 0, \\ -\infty & \text{ha} \quad a < 0, \end{cases}$$

  továbbá legyen $\infty \cdot \infty \triangleq (-\infty) \cdot (-\infty) \triangleq \infty$, és $(-\infty) \cdot \infty \triangleq \infty \cdot (-\infty) \triangleq -\infty$.

1.32. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x \in \mathbb{R}$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$\begin{aligned} [x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z\} \\ ]x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} \mid x < z\} \\ ]-\infty, x] &= \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq x\} \\ ]-\infty, x[&= \{z \in \mathbb{R} \mid z < x\} \end{aligned}$$

Továbbá bevezetjük még az

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

A továbbiakban, ha nem okoz félreértést a bővített $\overline{\leq}$ relációra továbbra is a $\leq$ jelet használjuk, valamint a bővített $+$ és $\cdot$ műveletre sem alkalmazunk új jelölést.

1.33. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ teljesen rendezett test *arkhimédészi módon rendezett*, ha $\forall x, y \in K$ elemhez $x > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $y < n \cdot x$ teljesül.

1.19. Tétel. *Minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen K nem arkhimédészi módon rendezett test, és legyen $x, y \in K$ olyan, hogy $0 < x$ és egyetlen $n \in \mathbb{N}$ számra sem teljesül, hogy $y < n \cdot x$. Ekkor az $X \triangleq \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz felső korlátja y, vagyis létezik $\sup X$. Ekkor $(\sup X) - x$ nem felső korlátja az X halmaznak, tehát létezik $n \cdot x \in X$, melyre $(\sup X) - x < n \cdot x$, vagyis $\sup X < (n+1) \cdot x$, ami ellentmondás.

1.20. Tétel. *A valós számtest arkhimédészi módon rendezett test.*

Bizonyítás. A 1.16 tétel alapján $\mathbb{R}$ teljesen rendezett test, az előző 1.19 tétel alapján pedig minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett test.

1.34. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az

$$[x] \triangleq \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid x < n\} - 1, & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Z}; \\ x, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

számot az x *egész részének* a

$$\{x\} \triangleq x - [x]$$

számot pedig az x *tört részének* nevezzük.

Eddig láttuk, hogy létezik teljesen rendezett test, a következő tétel a teljesen rendezett testek egyértelműségéről szól.

1.21. Tétel. *Bármely két teljesen rendezett test izomorf. Vagyis ha* $(\mathbf{K}, \oplus, \ominus, \times, ^{\ominus 1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$ *teljesen rendezett test, akkor létezik olyan* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{K}$ *bijekció, melyre* $\varphi(0) = \mathbf{0}$, $\varphi(1) = \mathbf{1}$ *és minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *elem esetén*

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y) \\ \varphi(-x) &= \ominus\varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \\ x \neq 0 \ &\Rightarrow\ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \ \wedge\ \varphi\left(x^{-1}\right) = (\varphi(x))^{\ominus 1} \\ x \leq y \ &\Leftrightarrow\ \varphi(x) \preceq \varphi(y) \end{aligned}$$

teljesül.

1.9. Számosságok

1.35. Definíció. Legyen A és B halmaz.

- Az A és B *ekvipotens*, ha létezik $f : A \to B$ bijekció. Ezt a tényt $|A| = |B|$ jelöli.
- Az A halmaz *kisebb-egyenlő számosságú* a B halmaznál, ha $\exists X \subseteq B : \ |A| = |X|$. Ebben az esetben az $|A| \leq |B|$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *kisebb számosságú* a B halmaznál, ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$. Ennek jele $|A| < |B|$.
- Az A és B halmaz *számosság tekintetében összehasonlítható*, ha $(|A| \leq |B|) \vee (|B| \leq |A|)$ teljesül.

Fontos megjegyezni, hogy jelen pillanatban $|A|$ még csak pusztán szimbólum, melyet nem definiáltunk, csak az $|A| \leq |B|$, az $|A| < |B|$ és az $|A| = |B|$ típusú kifejezéseket értelmeztük eddig.

Most a halmazok számosságának két alaptétele következik, melyek biztosítják, hogy bármely két halmaz összehasonlítható a számosság tekintetében, valamint, ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.

1.22. Tétel. *Bármely két halmaz számosság tekintetében összehasonlítható.*

Bizonyítás. Legyen A, B halmaz, és

$$\mathcal{F} \triangleq \{f \subseteq A \times B \mid f \text{ injektív függvény}\},$$

melyen $\leq$ jelöli a tartalmazás relációt. Először megmutatjuk, hogy létezik maximális elem az $\mathcal{F}$ halmazban. Legyen $H \subseteq \mathcal{F}$ olyan halmaz, melynek bármely két eleme összehasonlítható, és legyen

$f \triangleq \bigcup_{h \in H} h$. Ekkor f injektív, tehát $f \in \mathcal{F}$, és f a H egy felső korlátja. Tehát $(\mathcal{F}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz. Ezért a Zorn-lemma miatt van maximális elem az $\mathcal{F}$ halmazban, jelölje ezt g. Ekkor a g függvényre $\operatorname{Dom} g = A$ vagy $\operatorname{Ran} g = B$ teljesül, ugyanis ha $\operatorname{Dom} g \neq A$ és $\operatorname{Ran} g \neq B$, akkor létezik $a_0 \in A \setminus \operatorname{Dom} g$ és $b_0 \in B \setminus \operatorname{Ran} g$ elem, és a

$$\tilde{g} : \operatorname{Dom} g \cup \{a_0\} \to \operatorname{Ran} g \cup \{b_0\} \qquad x \mapsto \begin{cases} g(x), & \text{ha} \quad x \in \operatorname{Dom} g; \\ b_0, & \text{ha} \quad x = a_0 \end{cases}$$

függvényre $g < \tilde{g}$ teljesül, vagyis g nem maximális.
Ha $\operatorname{Dom} g = A$, akkor $|A| \leq |B|$, és ha $\operatorname{Ran} g = B$, akkor $|B| \leq |A|$.

1.23. Tétel. *(Schröder–Bernstein-tétel) Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ esetén $|A| = |B|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $i : A \to B$ és $j : B \to A$ injektív leképezés.
1. Ha $E \subseteq A$ olyan, hogy $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$ teljesül, akkor a

$$\rho : A \to B \quad x \mapsto \begin{cases} i(x) & \text{ha} \quad x \in E \\ j^{-1}(x) & \text{ha} \quad x \notin E \end{cases}$$

leképezésről könnyen ellenőrizhető, hogy bijekció.
2. Legyen $\mathcal{H} \triangleq \{H \subseteq A |\, j(B \setminus i(H)) \subseteq A \setminus H\}$ és $E \triangleq \cup\mathcal{H}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$ teljesül.
2./1. $j(B \setminus i(E)) \subseteq A \setminus E$:

$$\begin{aligned} i(E) &= i\left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\right) = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} i(H) \\ B \setminus i(E) &= B \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} i(H) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} B \setminus i(H) \\ j(B \setminus i(E)) &= j\left(\bigcap_{H \in \mathcal{H}} B \setminus i(H)\right) \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{H}} A \setminus H = A \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H = A \setminus E \end{aligned}$$

2./2. $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$: Legyen $F \triangleq A \setminus j(B \setminus i(E))$. A 2./1. miatt $E \subseteq F$.

$$E \subseteq F \implies j(B \setminus i(F)) \subseteq j(B \setminus i(E)) = A \setminus F \implies F \in \mathcal{H}$$

Mivel $E \subseteq F$, $F \in \mathcal{H}$ és $E = \cup\mathcal{H}$, ezért $E = F$, vagyis $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$.

1.24. Tétel. *Bármely A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ teljesül.*

Bizonyítás. A 1.9 Cantor-tétel következménye.

1.36. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz.
- Az A halmaz *véges*, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, melyre $|A| = |n|$ teljesül, ekkor az mondjuk, hogy A *egy n elemű halmaz*, és az $|A| = n$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *végtelen*, ha nem véges.
- Az A halmaz *megszámlálható*, ha véges vagy $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha $|A| = |\mathbb{N}|$.

– Az A halmaz *kontinuum számosságú*, ha $|A| = |\mathbb{R}|$.

1.25. Tétel. *Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre $|A| = n$ és $|B| = m$ teljesül, ahol $n, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Bármely $X \subseteq A$ halmazra $|X| \leq n$.*
2. $|A \times B| = mn$
3. *Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $|A \cup B| = n + m$.*
4. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$
5. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
6. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$

1.26. Tétel. *(Megszámlálhatóan végtelen halmazok.)*

1. *Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor végtelen, ha $|\mathbb{N}| \leq |A|$ teljesül.*
3. *Két megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata megszámlálhatóan végtelen.*
4. *Megszámlálható sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója megszámlálhatóan végtelen.*
5. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
6. *Ha A végtelen halmaz és B megszámlálhatóan végtelen, akkor $|A| = |A \cup B|$.*

2 A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Algebrai tulajdonságok

2.1. Tétel. *(Bernoulli-egyenlőtlenség.) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots x_n \in [-1, \infty[$ számra, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $0 \le x_i x_j$ teljesül, akkor*

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \le x$ esetén

$$(1+x)^n \ge 1 + nx.$$

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás. Teljes indukciót használva tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, és legyen $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [-1, \infty[$ olyan, hogy minden $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ esetén $0 \le x_i x_j$. Ekkor az indukciós feltételt kihasználva

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) = (1+x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge (1+x_{n+1})\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1} \ge 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $n + 1$ esetén is igaz az állítás.

Kiegészítés. A Bernoulli-egyenlőtlenség speciális esetének egyfajta megfordítása is igaz.

$\diamondsuit$

2.2. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik egyetlen olyan $y \in \mathbb{R}_0^+$, melyre $y^n = x$ teljesül.*

2.1. Definíció. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén azt a jól meghatározott $y \in \mathbb{R}_0^+$ számot, melyre $y^n = x$ teljesül x *n-edik gyökének* nevezzük, ennek jele $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$.

2.3. Tétel. *Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

Bizonyítás. Az $\alpha = \sqrt[n]{x^m}$ és a $\beta = (\sqrt[n]{x})^m$ számokra $\alpha^n = x^m = \beta^n$ teljesül. Ezen számok n-edik gyöke létezik és egyértelmű, ezért $\alpha = \beta$.

2.2. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^+$ *számnak a $q \in \mathbb{Q}$ kitevőjű hatványát* az alábbi módon értelmezzük.

$$x^q \triangleq \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & \text{ha } \; q > 0, \; q = \frac{m}{n}; \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ 1, & \text{ha } \; q = 0; \\ \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^m}, & \text{ha } \; q < 0, \; q = -\frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Továbbá $q > 0$ esetén legyen $0^q \triangleq 0$, és $0^0 \triangleq 1$.

2.4. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén.*

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{pq}, \quad \frac{1}{x^p} = x^{-p}.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságaiból egyszerűen adódik.

2.3. Definíció. Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa*

$$n! \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \prod_{i=1}^{n} i, & \text{ha} \quad n > 0. \end{cases}$$

Az $n, k \in \mathbb{N}$ számokra definiáljuk az n *alatt a* k számot a

$$\binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha} \quad k \le n \\ 0 & \text{ha} \quad k > n \end{cases}$$

képlettel.

2.5. Tétel. *(Binomiális tétel.) Minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás. Az $n = 0$ esetben nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Ekkor

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

adódik a könnyen igazolható

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

formula segítségével.

2.4. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ test feletti *abszolút értéknek* nevezünk minden olyan

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto |x|$$

függvényt melyre az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x \in K : \ (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0)$
2. $\forall x, y \in K : \ |xy| = |x| \cdot |y|$
3. $\forall x, y \in K : \ |x + y| \le |x| + |y|$

2.6. Tétel. *Az*

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \quad z \mapsto \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

függvény abszolút érték, melynek a megszorítása a valós illetve racionális számok halmazára szintén abszolút érték.

Bizonyítás. Ha $z = 0$, akkor nyilván $|z| = 0$, valamint ha $|z| = 0$, akkor $\operatorname{Re} z = 0$ és $\operatorname{Im} z = 0$, vagyis $z = 0$. Ha $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ és $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$, ahol $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, akkor

$$|z_1 z_2|^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2 \, |z_2|^2 ,$$

valamint

$$|z_1 + z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \le \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

teljesül, ahol a második résznél használtuk a Cauchy–Schwart–Bunyakovszkij egyenlőtlenséget a

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

lépésnél.

2.7. Tétel. *(Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Bizonyítás. 1. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás.
2. Ha $n = 2$, akkor a bizonyítandó

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1 x_2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(x_1 - x_2)^2 \ge 0$$

egyenlőtlenséggel. Azt pedig a 1.18 tétel alapján tudjuk, hogy rendezett testekben a négyzetszámok pozitív elemek.
3. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, akkor a $2n$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor felhasználva, hogy az n és a 2 számokra igaz az egyenlőtlenség

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} x_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{n+k} \right) \ge \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}} \right) \ge$$
$$\ge \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}}} = \sqrt[2n]{\prod_{k=1}^{2n} x_k}$$

adódik.
4. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}^+$, $n > 2$ számra igaz az állítás, akkor az $n-1$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$, és legyen

$$x_n = \sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} x_k}.$$

Ekkor az $x_1, \ldots, x_n$ számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség átrendezéséből adódik az állítás.

2.8. Tétel. *(Elemi Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.)*
Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - t y_k)^2 = t^2 \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2t \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right),$$

ezért a fenti t szerinti másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem lehet pozitív, azaz

$$4 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \leq 0,$$

amiből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

2.2. Topológiai tulajdonságok

2.5. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{R}$ pontra a

$$B_r(x) \stackrel{\triangle}{=} \{y \in \mathbb{R} |\ |x - y| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

2.6. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz

- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $\mathbb{R} \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

2.9. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció közvetlen következménye. A második állításhoz vegyünk $A_1, \ldots, A_n$ korlátos halmazokat, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1,\ldots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $R_i = r_i + |x_i - x_1|$. Ekkor minden i számra $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül az abszolútértékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

2.10. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ számra $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R = r - |x - y|$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z \in B_R(y)$, akkor $|z - y| < R = r - |x - y|$, vagyis $|x - y| + |y - z| < r$, amiből pedig $|x - z| < r$ adódik, vagyis $z \in B_r(x)$.

2.11. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.)*

1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{R}$ halmaz nyílt.*

2. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.

3. Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i = 1, \ldots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min \{r_i \mid i = 1, \ldots, n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i\in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

2.12. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.)*

1. Az üres halmaz és a $\mathbb{R}$ halmaz zárt.

2. Véges sok zárt halmaz uniója zárt.

3. Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\ldots,n}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mathbb{R} \setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus Z_i)$$

azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.

3. Legyen $(Z_i)_{i\in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mathbb{R} \setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{R} \setminus Z_i)$$

azonosság miatt $\bigcap_{i\in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i\in I} Z_i$ halmaz zárt.

2.13. Tétel. *Legyen $Z, U \subseteq \mathbb{R}$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz és $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (\mathbb{R} \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (\mathbb{R} \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

2.7. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X \neq \emptyset \;\wedge\; B_r(x) \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \; (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X = \{x\}$.

2.8. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

2.9. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{R} | \; \exists r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{R} | \; \forall r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

2.14. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén*
1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in \mathbb{R} \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - |y - z| > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

2.15. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén*

1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

2.16. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, és legyen $x \in \mathbb{R}$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$.
Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

2.17. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz.*

1. *Ha az X halmaz zárt, akkor $\inf X, \sup X \in X$.*
2. *Ha az X halmaz nyílt, akkor $\inf X, \sup X \notin X$.*

Bizonyítás. 1. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos zárt halmaz. Ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $\inf X + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x \in X$, melyre $x < \inf X + r$ teljesül, valamint $\sup X - r$ nem a legkisebb felső korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x' \in X$, melyre $\sup X - r < x'$ teljesül. Tehát minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(\inf X) \cap X \neq \emptyset$ és $B_r(\sup X) \cap X \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy $\inf X, \sup X \in \overline{X} = X$.
2. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos nyílt halmaz. Ha $\inf X \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(\inf X) \subseteq X$ teljesül, vagyis $\inf X$ nem alsó korlátja az X halmaznak. A $\sup X$ számra hasonló ellentmondást kapunk a $\sup X \in X$ feltételezésből.

2.10. Definíció. Adott $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ halmazok esetén azt mondjuk, hogy az X *halmaz sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$ teljesül, valamint, hogy az X *halmaz sűrű*, ha X sűrű a $\mathbb{R}$ halmazban.

2.18. Tétel. *(A racionális és az irracionális számok sűrűn vannak.)*

1. *A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*
2. *Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*

Bizonyítás.
1. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ tartalmazáshoz azt kell megmutatni, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $q \in \mathbb{Q}$ szám melyre $q \in B_r(x)$ teljesül, vagyis $q \in]x - r, x + r[$. Ehhez vegyünk egy tetszőleges

$0 < r$ paramétert. Ekkor az $\mathbb{R}$ arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < 2Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + N(x-r) < N(x+r)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq N(x-r) < n+1$ teljesül. Ekkor $n \leq N(x-r)$ miatt

$$n+1 \leq N(x-r)+1 < N(x-r)+2Nr = N(x+r),$$

ezért

$$N(x-r) < n+1 < N(x+r),$$

vagyis a $q_x = \dfrac{n+1}{N} \in \mathbb{Q}$ számra $q_x \in B_r(x)$ teljesül.

2. Ebben a részben használjuk az oszthatósági szabályok segítségével könnyen igazolható $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ formulát. Legyen $x \in \mathbb{R}$, és vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az $\mathbb{R}$ arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < \sqrt{2}Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + \frac{\sqrt{2}N}{2}(x-r) < \frac{\sqrt{2}N}{2}(x+r)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq \dfrac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} < n+1$ teljesül. Ekkor $n \leq \dfrac{\sqrt{2}N(x-r)}{2}$ miatt

$$n+1 \leq \frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} + 1 < \frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} + \sqrt{2}Nr = \frac{\sqrt{2}N(x+r)}{2},$$

ezért

$$\frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} < n+1 < \frac{\sqrt{2}N(x+r)}{2},$$

vagyis a $p_x = \dfrac{2(n+1)}{\sqrt{2}N} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{n+1}{N}$ számra $p_x \notin \mathbb{Q}$ és $p_x \in B_r(x)$ teljesül.

2.19. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Ha $i, j \in I$, akkor létezik olyan $k \in I$, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ teljesül, tehát

$$\inf(A_j) \leq \inf(A_k) \leq \sup(A_k) \leq \sup(A_i).$$

Ezek alapján a $\{\sup(A_i) |\ i \in I\}$ halmaz alulról korlátos, vagyis létezik a $x = \inf\{\sup(A_i) |\ i \in I\} \in \mathbb{R}$ elem. Megmutatjuk, hogy $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Ehhez elég azt igazolni, hogy minden $i \in I$ esetén $x \in \overline{A_i}$.

Legyen $i \in I$ és $r \in \mathbb{R}^+$, belátjuk, hogy $B_r(x) \cap A_i \neq \emptyset$. Mivel $x + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja a $\{\sup A_i |\ i \in I\}$ halmaznak, ezért létezik olyan $j \in I$, melyre $\sup A_j < x + r$. Legyen $k \in I$ olyan, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor nyilván $\sup A_k \leq \sup A_j < x+r$, továbbá $\sup A_k - r$ nem a legkisebb felső korlátja az A_k halmaznak, ezért létezik olyan $y \in A_k$, melyre $\sup A_k - r < y$. Az utolsó egyenlőtlenség miatt $x - r < y$, $\sup A_k \leq \sup A_j < x + r$ miatt $y < x + r$, valamint $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ miatt $y \in A_i$. Vagyis $y \in B_r(x) \cap A_i$.

Érdemes külön kiemelni a fenti állítás egy következményét.

2.20. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_{i+1} \subseteq A_i$. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az állítás az előzőek közvetlen következménye.

2.11. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *(be)fedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, melyre $\forall i \in I : A_i \subseteq \mathbb{R}$ és $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ teljesül. Az $(A_i)_{i\in I}$ befedés *részbefedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I'}$ rendszert, melyre $I' \subseteq I$ és $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül.

2.12. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i halmaz nyílt.

2.21. Tétel. *(Borel–Lebesgue-tétel valós számokra.) Az $\mathbb{R}$ halmaz valamely részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Megmutatjuk, hogy C korlátos. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_n(0)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $C \subseteq \bigcup_{n\in I} B_n(0)$. Ekkor az $r = \max_{n\in I}(n)$ számra $C \subseteq B_r(0)$ teljesül. Most igazoljuk, hogy C zárt. Tegyük fel, hogy C nem zárt, ami azt jelenti, hogy a C komplementere nem nyílt. Legyen $z \in \mathbb{R} \setminus C$ olyan pont, melyre minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(z) \nsubseteq \mathbb{R} \setminus C$, vagyis $B_r(z) \cap C \neq \emptyset$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra legyen $U_n = \mathbb{R} \setminus \overline{B_{\frac{1}{n}}(z)}$, mely nyílt halmaz. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} \setminus \{z\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} U_n$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $C \subseteq \bigcup_{n\in I} U_n$. Ekkor az $m = \max_{n\in I}(n)$ számra $C \subseteq U_m$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\overline{B_{\frac{1}{m}}(z)} \cap C = \emptyset$, vagyis ha $0 < r < \frac{1}{m}$, akkor $B_r(z) \subseteq \overline{B_{\frac{1}{m}}(z)}$, tehát $B_r(z) \cap C = \emptyset$, ami pedig ellentmondás.
Most tegyük fel, hogy $C \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz, valamint az $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszer a C halmaz nyílt fedése, vagyis minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, és $C \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ teljesül. Jelölje J az I halmaz nem üres, véges részhalmazainak a halmazát, vagyis $J = \{j \subseteq I |\ j \neq \emptyset,\ j \text{ véges}\}$, valamint minden $j \in J$ esetén legyen $B_j = C \setminus \bigcup_{i\in j} A_i$. Ekkor minden $j \in J$ esetén B_j korlátos zárt halmaz, valamint minden $j_1, j_2 \in J$ elemhez létezik olyan $j' \in J$, melyre $B_{j'} \subseteq B_{j_1} \cap B_{j_2}$ teljesül. Ha egyik B_j halmaz sem lenne üres, akkor a Cantor-féle közösrész-tétel alapján

$$\emptyset \neq \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{j\in J} \left(C \setminus \bigcup_{i\in j} A_i \right) = C \setminus \bigcup_{j\in J} \bigcup_{i\in j} A_i = C \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$$

teljesülne, ami ellentmondana annak, hogy az $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszer a C halmaz fedése. Tehát létezik olyan $j \in J$, melyre $B_j = \emptyset$. Ez viszont azt jelenti, hogy $C \subseteq \bigcup_{i\in j} A_i$, vagyis a C halmaznak létezik véges fedése.

Megjegyzés. A Cantor-féle közösrész-tétel ezek után úgy is megfogalmazható, hogy $\mathbb{R}$ egymásba ágyazott, nem üres, kompakt részhalmazainak a metszete nem üres. $\Diamond$

2.3. Függvények összege, szorzata

2.13. Definíció. Legyen A halmaz, $+ : A \times A \to A$ művelet, $a \in A$ és $U, V \subseteq A$. Ekkor definiáljuk az alábbi jelöléseket.

$$\begin{aligned} U + V &:= \{u + v \in A |\ u \in U,\ v \in V\} \\ a + V &:= \{a + v \in A |\ v \in V\} \\ U + a &:= \{u + a \in A |\ u \in U\} \end{aligned}$$

Ennek a segítségével értelmezhetők az alábbi *komplexus műveletek*.

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & (U, V) \mapsto U + V \\ \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & V \mapsto a + V \\ \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & U \mapsto U + a \end{array}$$

2.14. Definíció. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

– Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor definiáljuk a *függvények összegét*, *szozatát*, *számszorosát* és *abszolút értékét* az alábbi módon.

$$\begin{array}{rl} f + g : A \to \mathbb{R} & a \mapsto f(a) + g(a) \\ fg : A \to \mathbb{R} & a \mapsto f(a)g(a) \\ cf : A \to \mathbb{R} & a \mapsto cf(a) \\ |f| : A \to \mathbb{R} & a \mapsto |f(a)| \end{array}$$

– Értelmezzük az összeadás, szorzás, számmal való szorzás és abszolútérték képzés műveletét a függvények terén az alábbi módon.

$$\begin{array}{rr} + : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & (f, g) \mapsto f + g \\ \times : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & (f, g) \mapsto fg \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & (c, f) \mapsto cf \\ |\cdot| : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & (f) \mapsto |f| \end{array}$$

Az így bevezetett függvényműveleteket nevezzük *pontonkénti függvényműveleteknek.*

– Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $f_i \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor az $(f_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ *függvényrendszer alsó*, illetve *felső burkolóját* az alábbi képlettel definiáljuk.

$$\begin{array}{rl} \sup(f_1, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{R} & a \mapsto \sup(f_1(a), \ldots, f_n(a)) \\ \inf(f_1, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{R} & a \mapsto \inf(f_1(a), \ldots, f_n(a)) \end{array}$$

– Az $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *függvény pozitív*, illetve *negatív részét* az alábbi képletek definiálják.

$$\begin{array}{rl} f_+ : A \to \mathbb{R} & a \mapsto \sup(f(a), 0) \\ f_- : A \to \mathbb{R} & a \mapsto -\inf(f(a), 0) \end{array}$$

2.22. Tétel. *Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.*

1. *Ha* $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, *akkor*

$$f = f_+ - f_- \qquad |f| = f_+ + f_- \qquad f_+ f_- = 0 \tag{2.1}$$

teljesül.

2. *Ha* $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, *akkor*

$$\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \qquad \inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.
1. Legyen $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és legyen $a \in A$ tetszőleges.
Ha $f(a) > 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = f(a)$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a (2.1) egyenletek.
Ha $f(a) = 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a (2.1) egyenletek.
Ha $f(a) < 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = -f(a)$, vagyis ebben az esetben is teljesülnek a (2.1) egyenletek.
2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az $a < b$, $a = b$ és $a > b$ eseteket külön megvizsgálva igazolható egyszerűen a

$$\sup(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \qquad \inf(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

azonosság. Legyen $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor elég minden $x \in A$ elemre az $a = f(x)$ és a $b = g(x)$ választással alkalmazni az előző azonosságot a tétel bizonyításához.

2.15. Definíció. Adott $(a_i)_{i=0,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ esetén a

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

függvényt *polinomnak* nevezzük, az a_i paramétereket pedig a polinom *együtthatóinak*. Ha $a_n \neq 0$, akkor p *n-ed fokú polinom*, melynek *főegyütthatója* a_n. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ számot a *p polinom gyökének* nevezzük, ha $p(x_0) = 0$ teljesül.

3 Sorozatok

3.1. A határérték és tulajdonágai

3.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak*, az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvényeket *komplex számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat értékeire az $a_n \stackrel{\triangle}{=} a(n)$ jelölést használjuk.

3.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)

- Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}$ szám az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to \varepsilon < a_n).$$
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to -\varepsilon > a_n).$$
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

3.1. Tétel. *Ha $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke, akkor $x = y$.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < \dfrac{|x-y|}{2}$ és $|a_n - y| < \dfrac{|x-y|}{2}$. Amiből az
$$|x - y| = |x - a_n + a_n - y| \leq |x - a_n| + |a_n - y| < |x - y|$$
ellentmondás adódik.
Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y = \infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n > x + 1$, ami ellentmondás. Valamint hasonlóan, ha $x \in \mathbb{R}$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n < x - 1$, ami ellentmondás. Végül ha $x = \infty$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n < 0$ és $a_n > 0$, ami ellentmondás.

3.3. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

3.4. Definíció.

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le a_{n+1}$.
– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \ge a_{n+1}$.

3.2. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat, és legyen $A = \lim a$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \le n \le N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{N} \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

3.3. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \ge n$, ezért minden $n > N$ számra $\left|a_{\sigma(n)} - \lim a\right| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

3.4. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton növő korlátos sorozat, és legyen $A = \sup \operatorname{Ran} a$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az $A - \varepsilon < A$ egyenlőtlenség miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $A - \varepsilon < a_N$. Mivel az a sorozat monoton növő, így minden $n > N$ természetes számra $A - \varepsilon < a_N \le a_n \le A < A + \varepsilon$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, tehát $\lim a = \sup \operatorname{Ran} a$. Monoton csökkenő sorozatra teljesen hasonló a bizonyítás.

3.5. Tétel. *Zérussorozat és korlátos sorozat szorzata zérussorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos sorozat, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zérussorozat és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor minden $n > N$ számra

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < K \cdot |b_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

3.6. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat, és $\lambda \in \mathbb{R}$.*
– *Az $a + b$ sorozat konvergens és* $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
– *A λa sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a) = \lambda(\lim a)$.
– *Az ab sorozat konvergens és* $\lim ab = (\lim a)(\lim b)$.
– *Az $\overline{a}$ sorozat konvergens és* $\lim \overline{a} = \overline{\lim a}$.
– *Az $|a|$ sorozat konvergens és* $\lim |a| = |\lim a|$.
– *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \neq 0$ és $\lim a \neq 0$, akkor az $\frac{1}{a}$ sorozat konvergens és* $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat, az $A = \lim a$ és $B = \lim b$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.
1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

és minden $n > N_b$ számra $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $\lambda = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ekkor $n > N_a$ számra

$$|\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda| \cdot |a_n - A| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

3. Mivel az a sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Ha $B = 0$, akkor az előző állítás szerint egy korlátos és egy zérussorozat szorzata zérussorozat. Tehát elég a $B \neq 0$ esetet vizsgálni. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$ és legyen $N_b \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_b$ esetén $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$\left|\overline{a_n} - \overline{A}\right| = \left|\overline{(a_n - A)}\right| = |a_n - A| < \varepsilon.$$

5. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon.$$

6. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és legyen $\lim a = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ esetén $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$. Ekkor minden $n > N_1$ számra $|a_n| > \frac{|A|}{2}$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon |A|^2}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_1, N_a\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|a_n - A|}{|a_n| \cdot |A|} < \frac{|a_n - A|}{\frac{|A|}{2} \cdot |A|} < \frac{2}{|A|^2} \cdot \frac{\varepsilon |A|^2}{2} = \varepsilon.$$

3.7. Tétel. *Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\lim |a| = 0$ teljesül, akkor $\lim a = 0$*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor a $\lim |a| = 0$ tulajdonság miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$|a| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a $\lim a = 0$ tulajdonságot fejezi ki.

3.8. Tétel. *Ha az $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozatra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$, akkor $\lim a \leq \lim b$.*

Bizonyítás. Legyen $A = \lim a$, $B = \lim b$ és tegyük fel, hogy $B < A$. Az $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ és $|b_n - B| < \varepsilon$. Vagyis $n > N$ esetén az $A - \varepsilon < a_n$ egyenlőtlenség miatt $\dfrac{A+B}{2} < a_n$, és a $b_n < B + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $b_n < \dfrac{A+B}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $a_n \leq b_n$.

3.9. Tétel. *(Rendőr-elv.) Legyen $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim a = \lim c = x$ teljesül. Ekkor b konvergens, és $\lim b = x$.*

Bizonyítás. Bevezetve az $\alpha = b - a$ és a $\beta = c - a$ sorozatok, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ teljesül. A $\lim \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $-\varepsilon < \beta_n < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha_n| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim \alpha = 0$. Ekkor a $b = \alpha + a$ sorozat is konvergens és $\lim b = \lim \alpha + \lim a = x$.

3.10. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az*

$$a^p : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto a_n^p$$

sorozat konvergens, és

$$\lim a^p = (\lim a)^p$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$.
Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 2\,|A|$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\begin{aligned}
|A^p - a_n^p| &= |A - a_n| \cdot \left| \sum_{k=0}^{p-1} A^k a_n^{p-1-k} \right| \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k \, |a_n|^{p-1-k} < \\
&< |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k \, (2\,|A|)^{p-1-k} \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^{p-1} \, 2^{p-1} \leq \\
&\leq |A - a_n| \cdot p\,|A|^{p-1}\, 2^{p-1}.
\end{aligned}$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{p\,|A|^{p-1}\,2^{p-1}}.$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$|A^p - a_n^p| < |A - a_n| \cdot p\,|A|^{p-1}\,2^{p-1} < \frac{\varepsilon}{p\,|A|^{p-1}\,2^{p-1}} \cdot p\,|A|^{p-1}\,2^{p-1} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim a^p = A^p$.
Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 1$ teljesül, valamint létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra $|a_n| < \varepsilon$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$|a_n|^p \leq |a_n| < \varepsilon,$$

vagyis $\lim a^p = 0$.

3.11. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az*

$$\sqrt[p]{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto \sqrt[p]{a_n}$$

sorozat konvergens, és

$$\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim a}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$.
Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $a_n > \dfrac{A}{2}$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\left|\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n}\right| = \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} a_n^{\frac{p-1-k}{p}}} \leq \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{p-1-k}{p}}} <$$

$$< \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{p-1}{p}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} \cdot |A - a_n|\,.$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2}.$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left|\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n}\right| < |A - a_n| \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2} \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{A}$.
Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra $a_n < \varepsilon^p$ teljesül. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[p]{a_n} < \varepsilon,$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = 0$.

3.12. Tétel. *(Sorozatok racionális hatványa.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $q \in \mathbb{Q}$. Az*

$$a^q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto a_n^q$$

sorozat konvergens, és

$$\lim a^q = \begin{cases} (\lim a)^q, & \text{ha} \quad \lim a > 0 \ \vee \ q \geq 0; \\ \infty, & \text{ha} \quad \lim a = 0 \ \wedge \ q < 0 \end{cases}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat, $A = \lim a$ és $q \in \mathbb{Q}$. Ha $q = 0$, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás.
Ha $q > 0$, akkor létezik olyan $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, melyre $q = \dfrac{p_1}{p_2}$. Ekkor a 3.12 és a 3.11 tételből következik az állítás.
Ha $q < 0$, akkor a 3.6 tétel segítségével visszavezethető a $q > 0$ esetre az állítás.

3.2. Topologiai fogalmak jellemzése sorozatokkal

3.13. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre* $\lim a = x$.
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra* $\lim a \in A$.

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$.
1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

A 1.11 tétel alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset,$$

legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n - x| < \dfrac{1}{n+1}$.
Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - x| < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Ekkor $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ konvergens sorozat, melyre $\lim a = \alpha$ teljesül, tehát a tétel 1. pontja miatt α torlódási pontja az A halmaznak. Amiből az A halmaz zártsága miatt az $\alpha \in A$ ellentmondás adódik.
Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt, és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárás definíciója alapján ekkor α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

3.14. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.) Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos sorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a 2.20 Cantor-tétel feltételei, ezért $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge \ a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x.

Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozat, akkor a $\mathrm{Re} \circ a$ valós sorozathoz létezik olyan σ_1 indexsorozat, hogy $\mathrm{Re} \circ a \circ \sigma_1$ konvergens; és az $\mathrm{Im} \circ a \circ \sigma_1$ valós sorozathoz létezik olyan σ_2 indexsorozat, hogy $\mathrm{Im} \circ a \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ konvergens. Ekkor a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ indexsorozatra az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens lesz.

3.15. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz, valamint legyen $a : \mathbb{N} \to A$ tetszőleges sorozat. Mivel az a sorozat korlátos, ezért létezik a' konvergens részsorozata. Ekkor $\lim a' \in \overline{A}$, vagyis az A halmaz zártsága miatt $\lim a' \in A$.
Tegyük fel, hogy $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül. Megmutatjuk, hogy az A halmaz korlátos és zárt.
Ha az A halmaz nem korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \setminus B_{n+1}(0) \neq \emptyset$, ezért a 1.11 tétel miatt $\prod_{n\in\mathbb{N}} (A \setminus B_{n+1}(0)) \neq \emptyset$. Ha $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A \setminus B_{n+1}(0)$, akkor $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Ha a' ennek tetszőleges részsorozata, akkor $|a'_n| \geq n$, vagyis az a' sorozat nem korlátos, így konvergens sem lehet. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen konvergens részsorozata, tehát ellentmondásra jutottunk.
Ha az A halmaz nem zárt, akkor létezik $x \in \overline{A} \setminus A$ elem. A lezárt definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A \neq \emptyset$, ezért a 1.11 tétel miatt

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(A \cap B_{\frac{1}{n+1}}(x)\right) \neq \emptyset.$$

Ha $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A\right)$, akkor $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Legyen a' az a tetszőleges részsorozata. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a'_n \in B_{\frac{1}{n+1}}(x)$, ezért $\lim a' = x \notin A$ teljesül. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen olyan konvergens részsorozata melynek a határértéke az A halmazban lenne, tehát ellentmondásra jutottunk.

3.3. Limesz inferior és szuperior

3.5. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *limesz inferiorja*

$$\liminf a \triangleq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right)$$

és *limesz szuperiorja*

$$\limsup a \triangleq \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right).$$

3.16. Tétel. *Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\liminf a \leq \limsup a$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\limsup a < \liminf a$ és legyen $q \in]\limsup a, \liminf a[$. Ekkor a $\limsup$ és a $\liminf$ definíciója alapján léteznek olyan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ számok, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n_1} a_k < q < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n_2} a_k,$$

vagyis minden $n > \max\{n_1, n_2\}$ számra az

$$a_n < q < a_n$$

ellentmondást kapjuk.

3.17. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat.*

1. *Ha $\lim a \in \mathbb{R}$, akkor $\liminf a = \limsup a = \lim a$.*

2. Ha $\liminf a, \limsup a \in \mathbb{R}$ *és* $\liminf a = \limsup a$*, akkor az a sorozat konvergens és* $\lim a = \liminf a$ *teljesül.*

Bizonyítás. 1. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat, és legyen $\lim a = A \in \mathbb{R}$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

teljesül. Ezért

$$A - \varepsilon \leq \left(\inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq N+1} a_k \right) \leq \left(\sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq N+1} a_k \right) \leq A + \varepsilon,$$

amiből pedig a 3.16 tétel felhasználásával

$$A - \varepsilon \leq \liminf a \leq \limsup a \leq A + \varepsilon$$

adódik. Ezek alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül a $\liminf a, \limsup a \in [A - \varepsilon, A + \varepsilon]$, tehát

$$\liminf a = \limsup a = A.$$

2. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\liminf a = \limsup a \in \mathbb{R}$. Legyen $A = \liminf a$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel feltételezésünk szerint

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} a_k \right) = A = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} a_k \right),$$

ezért

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N} : &\quad A - \varepsilon < \inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq N_1} a_k \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} : &\quad A + \varepsilon > \sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq N_2} a_k. \end{aligned}$$

Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra az

$$A - \varepsilon < \inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq N_1} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq N_2} a_k < A + \varepsilon$$

egyenlőtlenségek alapján $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ adódik.

3.4. Cauchy-sorozatok

3.6. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} ((N < n \ \wedge\ N < m) \to |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

3.18. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N$ számra $|a_n - a_m| < 1$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a$ véges sok korlátos halmaz uniója, így korlátos.

3.19. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat határértéke A és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $n, m > N$ esetén

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3.20. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N_1$ esetén $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_2$ esetén $\left|a_{\sigma(n)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ha $n > N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor

$$|a_n - A| = \left|(a_n - a_{\sigma(n)}) + (a_{\sigma(n)} - A)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

3.21. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, akkor a 3.18 tétel alapján az a sorozat korlátos, és a 3.15 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján van konvergens részsorozata, amiből az 3.20 előző állítás alapján a konvergenciája adódik.
Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat, akkor a 3.19 tétel alapján Cauchy-sorozat.

3.5. Nevezetes határértékek

3.22. Tétel. *Adott $\alpha \in \mathbb{Q}$ mellett*

$$\lim_{n \to \infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad \alpha > 0, \\ 1 & \text{ha} \quad \alpha = 0, \\ 0 & \text{ha} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha > 0$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.20 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\alpha]{\varepsilon} < N \cdot 1.$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \leq n^\alpha,$$

vagyis $\lim\limits_{n \to \infty} n^\alpha = \infty$.
Ha $\alpha = 0$, akkor nyilvánvalóan $\lim\limits_{n \to \infty} n^0 = \lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1$.
Ha $\alpha < 0$, akkor a $\beta = -\alpha$ számra $\beta > 0$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.20 miatt létezik olyan $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\beta]{\frac{1}{\varepsilon}} < N \cdot 1.$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\left|\frac{1}{n^\beta}\right| \le \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0$.

3.23. Tétel. *Adott $q \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & ha \quad q > 1, \\ 1 & ha \quad q = 1, \\ 0 & ha \quad -1 < q < 1, \end{cases}$$

és $q \le -1$ esetén a q^n sorozat divergens.

Bizonyítás. Legyen $q > 1$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = q - 1 > 0$ mennyiséget. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.20 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\frac{\varepsilon - 1}{a} < N \cdot 1.$$

Ebből, és a 2.1 Bernoulli-egyenlőtlenségből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \le 1 + na \le (1 + a)^n = q^n,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.
A $q = 1$ és a $q = 0$ esetekben nyilvánvalóan teljesül az állítás.
Legyen $q \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ mennyiséget. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|q^n| = \frac{1}{(1 + a)^n} \le \frac{1}{1 + na} \le \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n},$$

amiből a 3.9 rendőr-elv és a 3.22 tétel alapján adódik a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ határérték.
Legyen $q \le -1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left|q^n - q^{n+1}\right| \ge 1$, vagyis az $n \mapsto q^n$ sorozat nem Cauchy-sorozat, ezért nem is konvergens.

3.24. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{R}^+$ számra* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Bizonyítás. Ha $q = 1$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $q > 1$, és tekintsük az $a_n = \sqrt[n]{q} - 1$ sorozatot. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > 0$ és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$q = (1 + a_n)^n \ge 1 + na_n,$$

amiből

$$0 \le a_n \le \frac{q - 1}{n}$$

adódik. Ebből a rendőr-elv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, és így $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ következik.
Ha $q < 1$, akkor tekintsük a $q' = \frac{1}{q}$ számot. Ekkor az előző eredmény alapján.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q'}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q'}} = 1$$

3.25. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot(1)^{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}.$$

Ebből a 3.9 rendőr-elv alapján adódik a bizonyítandó állítás.

3.26. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Definiáljuk az $N_1 = 2([\varepsilon]+1)$ és az $\alpha = \dfrac{N_1!}{\varepsilon^{N_1}}$ számot. Ha $n > N_1$ természetes szám, akkor

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} = \alpha \cdot \prod_{k=1}^{n-N_1} \frac{k+N_1}{\varepsilon} > \alpha \cdot 2^{n-N_1} = \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n.$$

Mivel a 3.23 tétel miatt $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$2^n > \frac{2^{N_1}}{\alpha}$$

teljesül. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor minden $n > N$ természetes számra

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot \frac{2^{N_1}}{\alpha} = 1$$

teljesül, vagyis

$$\sqrt[n]{n!} > \varepsilon.$$

3.27. Tétel. *(Hányados-kritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Bizonyítás. Legyen q olyan valós szám melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$. A sorozat határértékének a definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| < q \cdot |a_N|.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$0 < |a_{N+k}| < q^k \cdot |a_N|.$$

Amiből a $k \to \infty$ határérték képzéssel a rendőr-elv alapján $\lim\limits_{k\to\infty} |a_{N+k}| = 0$ következik, ebből pedig $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = 0$ adódik.

3.28. Tétel. *Legyen $p \in \mathbb{Q}$ és $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|q| < 1$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$.*

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$, és tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = n^p q^n$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |q| \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = |q| < 1$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 3.12 tételt. A fenti egyenlőtlenségből pedig a sorozatokra vonatkozó 3.27 hányados-kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$ következik.

3.29. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{R}$ esetén* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$.

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$, és tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|}{n+1} = 0 < 1$$

adódik, amiből a sorozatokra vonatkozó 3.27 hányados-kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ következik.

3.30. Tétel. *Minden $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$.

Bizonyítás. Az $\alpha < 0$ esetben a 3.23 tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0$, és a minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra fennálló

$$0 \leq \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenségre alkalmazva a rendőr elvet $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$ adódik, tehát ezen két sorozat szorzatára szintén $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$ adódik.

Tehát elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = \dfrac{n^\alpha}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 0 \cdot 1 = 0 < 1$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 3.12 tételt. A sorozatokra vonatkozó 3.27 hányados-kritérium alapján ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$.

3.31. Tétel. *(Napier állandó.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az*

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

sorozat korlátos, monoton növő, tehát konvergens.

2. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén a*

$$b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

konvergens.

3. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. A $z_1 = \cdots = z_n = 1+\frac{x}{n}$, $z_{n+1} = 1$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \le \frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+1+x}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1}$$

adódik, amiből hatványozással $a_n \le a_{n+1}$ következik.
Jelölje $[x]$ az x szám egészrészét, tehát azt a jól meghatározott egész számot melyre $[x] \le x$ és $[x]+1 > x$. Az $z_1 = \cdots = z_n = 1+\frac{x}{n}$, $z_{n+1} = \cdots = z_{n+[x]+1} = 1-\frac{x}{[x]+1}$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned}\sqrt[n+[x]+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1}} &\le \frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+([x]+1)\left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)}{n+[x]+1} = \\ &= \frac{n+x+[x]+1-x}{n+[x]+1} = 1\end{aligned}$$

adódik, amiből hatványozással

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \le 1$$

következik. Ennek átrendezése adja a sorozat korlátosságát bizonyító

$$a_n \le \left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{-[x]-1}$$

egyenlőtlenséget. Ezek alapján az a sorozat monoton növő, és felülről korlátos, vagyis konvergens.
2. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$. Mivel $[x] \le x < [x]+1$, ezért $0 < [x]+1-x \le 1$, vagyis minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{x}{n+1} \le \frac{x}{n+[x]+1-x} < \frac{x}{n}.$$

Ebből

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

adódik, tehát a rendőr elv alapján a

$$\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^n$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^{-[x]-1} = 1,$$

ezért a
$$c : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^{n+[x]+1}$$
sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$
A minden $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{x\}$ számra érvényes
$$b_n = \left(\frac{n - x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n - x}\right)^n\right)^{-1}$$
átalakításból azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $b_{n+[x]+1} = c_n^{-1}$. Mivel a c sorozat konvergens és $\lim c \neq 0$ (hiszen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_1 \leq c_n$), ezért a b sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \left(\lim_{n\to\infty} c_n\right)^{-1}. \tag{3.1}$$

3. A (3.1) egyenlet jelenti a bizonyítandó egyenlőséget.

3.32. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

Bizonyítás. Tekintsük a $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b_n = \dfrac{n!}{n^n}$ sorozatot. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^n.$$
A 3.31 tételben definiált $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 1$ teljesül, hiszen a sorozat monoton növő és $a_1 = 2 > 1$. Ezért
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} < 1$$
adódik. A sorozatokra vonatkozó 3.27 hányados-kritérium alapján ezért $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

4 Sorok

4.1. Sorok határértéke és tulajdonságai

4.1. Definíció. (*Sorok.*)

– Adott $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük, és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.

– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim \sum a$ jelölést használjuk.

– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.

– Ha $\lim \sum a = \pm\infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

4.1. Tétel. *Legyen $\sum a, \sum b$ konvergens sor, és $\lambda \in \mathbb{R}$.*

– *A $\sum(a+b)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

– *A $\sum(\lambda a)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

– *A $\sum \overline{a}$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Mivel az α és a β sorozat konvergens, ezért összegük, számszorosuk és konjugáltjuk is konvergens lesz. Továbbá a

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(c\alpha_n) = c\lim_{n\to\infty}\alpha_n$$
$$\lim_{n\to\infty}\overline{\alpha_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}\alpha_n}$$

egyenlőségek teljesülnek.

4.2. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor* $\lim a = 0$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, és legyen $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Ekkor az $n \to \alpha_n$ és az $n \to \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek, és határértékük megegyezik. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

4.3. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat. A $\sum a$ sor pontosan akkor konvergens ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \to \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. A sorozatokra vonatkozó 3.20 Cauchy-kritérium alapján az $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, vagyis ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \to |\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon \right)$$

teljesül.

4.4. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left((N < n) \to \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, vagyis Cauchy-sorozat. Ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N + 1 < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$|\alpha_m - \alpha_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül, amiből az $m \to \infty$ határátmenettel

$$|\lim \alpha - \alpha_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

adódik, amiből a

$$\lim \alpha - \alpha_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

átalakítással adódik az állítás.

4.2. Majoráns és minoráns kritérium

4.5. Tétel. *(Majoráns és minoráns kritérium.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sort.*

1. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$, és a $\sum b$ sor konvergens, akkor a $\sum a$ sor is konvergens, továbbá $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*
2. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq b_n$, és a $\sum b$ sor divergens, akkor a $\sum a$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
1. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \leq \beta_n$. Mivel a β sorozat konvergens, ezért korlátos is. Az α sorozat korlátos az $\alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt, továbbá monoton növő az α sorozat a konstrukciója miatt. Ezek alapján az α sorozat konvergens.
2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \geq \beta_n$. Mivel a β sorozat divergens, és monoton növő, ezért $\lim \beta = \infty$. Az $\alpha_n \geq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt $\lim \alpha = \infty$, vagyis az α sorozat divergens.

4.6. Tétel. *A* $\sum_n \frac{1}{n+1}$ *sor divergens, a* $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ *sor konvergens.*

Bizonyítás. 1. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

teljesül. Ebből pedig következik a $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor divergenciája.
2. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

teljesül. Ezek alapján a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor felülről korlátos és monoton növő, tehát konvergens. Sőt még a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

becslés is adódik.

4.3. Abszolút konvergens sorok

4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

4.7. Tétel. *Ha a* $\sum a$ *sor abszolút konvergens, akkor konvergens is, és*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| .$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a belőle képzett $\sum a$ sor abszolút konvergens, és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.
Megmutatjuk, hogy az $n \mapsto \alpha_n$ sorzat Cauchy-sorozat, így a 3.21 Cauchy-kritérium alapján konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és legyen $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| A - \sum_{k=0}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

Ezek alapján minden $n, m > N$ természetes számra

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \left| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} a_k \right| \leq \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat.

4.8. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_n q^n$ sor*

- *divergens, ha $|q| \geq 1$;*
- *abszolút konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ha $|q| \geq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat nem tart a nullához, vagyis $\sum_n q^n$ sor a 4.2 konvergencia szükséges feltétele alapján a nem lehet konvergens.
Ha $|q| < 1$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

teljesül, valamint a 3.23 tétel alapján $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Ezekből az $n \to \infty$ határátmenet után

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

adódik.

4.4. Konvergenciakritériumok

4.9. Tétel. *(Kondenzációs kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat. Ekkor ha a $\sum_n a_n$ és a $\sum_n 2^n a_{2^n}$ sor közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. Az a sorozat monoton csökkenése miatt az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek.

$$\alpha(2^n - 1) = a_0 + \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \leq$$

$$\leq a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} = a_0 + \beta(n-1)$$

$$\alpha(2^n) = a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{2^n} a_k = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+j} \geq$$
$$\geq a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+2^k} = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^{k+1}} = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\beta(n)$$

Tekintsük az $n \mapsto \alpha(n)$ és $n \mapsto \beta(n)$ monoton növő sorozatokat. A fenti becslés azt mutatja, hogy ha az egyik nem korlátos, akkor a másik sem az. Vagyis ha az egyik sor divergens, akkor a másik is. Ebből pedig következik, hogy ha egyis sor konvergens, akkor a másik is.

Kiegészítés. A kondenzációs kritérium általánosabb formában is igaz.

4.10. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat és $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ekkor ha $\sum_n a_n$ $\sum_n p^n a_{p^n}$ sorok közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.*

◊

4.11. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{Q}$. A $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $q > 1$.*

Bizonyítás. A 4.9 kondenzáicós kritérium alapján a $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, amikor a $\sum_n \frac{2^n}{(2^n)^q}$ sor konvergens. Ezt a sort a $\sum_n \left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)^n$ alakban lehet felírni, ami a $\frac{1}{2^{q-1}}$ hányadosú geometriai sor összege. A geometriai sor konvergenciájára vonatkozó 4.8 tétel alapján, ez pontosan akkor konvergens, ha $\frac{1}{2^{q-1}} < 1$ teljesül, ez pedig a $q > 1$ feltétellel ekvivalens.

4.12. Tétel. *(Cauchy-féle gyökkritérium.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat esetén*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;*
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *akkor a $\sum a$ sor divergens.*

Bizonyítás. 1. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$. Ekkor a lim sup definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N},\ k > N \right\} < q$, ezért minden $k > N$ számra $|a(k)| < q^k$. A $\sum_k q^k$ geometriai sor konvergens, mert $q \in]0, 1[$, ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért konvergens is.
2. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$. Ekkor a lim sup definíciója alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén $\sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N},\ k > N \right\} > q$. Tehát minden $N \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén létezik olyan $k > N$, melyre $|a_k| > q^k$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid |a_k| > q^0\right\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge\ |a_k| > q^{n+1}\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ nem korlátos részsorozata az a sorozatnak. Ezek alapján az a sorozat sem korlátos, ezért konvergens sem lehet, emiatt pedig a $\sum a$ sor sem lehet konvergens.

4.13. Tétel. *Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}'$ sorozatra*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}'$ tetszőleges sorozat.
1. Legyen $\alpha < \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tetszőleges való szám. Ekkor a $\liminf$

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\inf \left\{ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq N \right\} \right)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| > \alpha \cdot |a_N| .$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| > \alpha^k \cdot |a_N| .$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}.$$

Amiből

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \liminf_{n\to\infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}} \right) = \alpha$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha < \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \to \qquad \alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

következtetés, ezért

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

2. A 3.16 tétel szerint minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}'$ sorozatra teljesül az

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

egyenlőtlenség.
3. Legyen $\alpha > \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tetszőleges valós szám. Ekkor a $\limsup$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \inf_{N\in\mathbb{N}} \left(\sup \left\{ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq N \right\} \right)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| < \alpha \cdot |a_N| .$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| < \alpha^k \cdot |a_N| \,.$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}.$$

Amiből

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}} \right) = \alpha$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha > \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \to \qquad \alpha \ge \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

következtetés, ezért

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

4.14. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}'$ olyan, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \mathbb{R}$ határérték. Ekkor létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Bizonyítás. Az előző 4.13 állítás és a 3.17 tétel alapján nyilvánvaló.

4.15. Tétel. *(D'Alembert-féle hányadoskritérium.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}'$ sorozat esetén*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, *akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;*
2. $\liminf\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, *akkor a $\sum a$ sor divergens.*

Bizonyítás. A 4.12 Cauchy-féle gyökkritérium és a 4.13 tétel alapján nyilvánvaló.

4.5. Leibniz-sorok

4.3. Definíció. A $\sum\limits_n (-1)^n a_n$ sor *Leibniz-típusú* vagy *Leibniz-sor*, ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat.

4.16. Tétel. *Ha $\sum\limits_n (-1)^n a_n$ Leibniz-sor, akkor konvergens, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$|H_n| \le a_{n+1}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\begin{aligned}
\alpha(2n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(a_{2k} - a_{2k+1}) + a_{2n} \geq 0 \\
\alpha(2n+1) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(-a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2n+1} \leq a_0 \\
\alpha(2(n+1)) &= \alpha(2n) - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq \alpha(2n) \\
\alpha(2(n+1)+1) &= \alpha(2n+1) + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq \alpha(2n+1)
\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek alapján az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat alulról korlátos és monoton csökkenő, ezért konvergens, valamint az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat felülről korlátos és monoton növő, ezért szintén konvergens. A

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha(2n+1) - \alpha(2n)) = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = 0$$

határérték alapján $\lim_{n\to\infty} \alpha(2n+1) = \lim_{n\to\infty} \alpha(2n)$, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} \alpha(n)$ határérték. Legyen $A = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Mivel az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat monoton csökkenő és az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat monoton növő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\alpha(2n+1) \leq A \leq \alpha(2n),$$

ezért

$$\begin{aligned}
0 \leq &A - \alpha(2n+1) \leq \alpha(2n+2) - \alpha(2n+1) = a_{2n+2} &&\to \quad |A - \alpha(2n+1)| \leq a_{2n+2}, \\
0 \geq &A - \alpha(2n) \geq \alpha(2n+1) - \alpha(2n) = -a_{2n+1} &&\to \quad |A - \alpha(2n)| \leq a_{2n+1},
\end{aligned}$$

ami bizonyítja a hibatagra vonatkozó $|H_n| \leq a_n$ becslést.

4.6. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok

4.4. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat.

- A $\sum a$ sor *átrendezésének* nevezzük a $\sum a \circ \sigma$ sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció. Tehát az átrendezett sor n-edik tagja $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltétlen konvergens*, ha minden átrendezése konvergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

4.17. Tétel. *Minden abszolút konvergens sor feltétlen konvergens, valamint az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges abszolút konvergens sorozat és $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Továbbá vezessük be az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és a $B = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jelöléseket. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén legyen $n' = \max\{\sigma(k) |\ k \in \{0,\dots,n\}\}$, ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} |a \circ \sigma| = \sum_{k=0}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{l=0}^{n'} |a_l| \leq B.$$

Ezért az $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} |a_{\sigma(k)}|$ sorozat felülről korlátos és monoton növő, tehát konvergens. Vagyis a $\sum a \circ \sigma$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens.

Megmutatjuk, hogy $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért minden $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon_1.$$

Ekkor az $N_2 = \max\left\{\sigma^{-1}(k) |\ k \in \{0,\dots,N_1\}\right\}$ számra igaz, hogy minden $n > N_2$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\}\\ \sigma(k)\leq N_1}} a_{\sigma(k)} + \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\}\\ \sigma(k)> N_1}} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{N_1+1} a_k + \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\}\\ \sigma(k)> N_1}} a_{\sigma(k)},$$

vagyis

$$\left|A - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}\right| = \left|A - \sum_{k=0}^{N_1} a_k - \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\}\\ \sigma(k)> N_1}} a_{\sigma(k)}\right| \leq \left|\sum_{k=N_1+1}^{\infty} a_k\right| + \left|\sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\}\\ \sigma(k)> N_1}} a_{\sigma(k)}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\}\\ \sigma(k)> N_1}} |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon_1.$$

Tehát a ε paraméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex (például a $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ választáshoz kapott N_2 paraméter), hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left|A - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}\right| < \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja a $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = A$ egyenlőséget.

4.7. Sorok Cauchy-szorzata

4.5. Definíció. Az a és $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük az

$$a * b : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

sorozatot.

4.6. Definíció. A $\sum a$ és $\sum b$ sor *Cauchy-szorzatának* nevezzük az $a * b$ sorozat által meghatározott $\sum a * b$ sort.

4.18. Tétel. *(Mertens tétele.) Ha a konvergens $\sum a$, $\sum b$ sorok közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ és $\sum b$ sorok Cauchy-szorzata konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Továbbá, ha a $\sum a$ és $\sum b$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum(a * b)$ sor is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Legyen a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $A_a = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, valamint legyen C olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - B\right| < C$ teljesül. Ekkor teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}(a * b)(k) - AB = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j - A\right) B + \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right). \tag{4.1}$$

A jobb oldal első tagja nullához tart. Megmutatjuk, hogy a második tag is a nullához tart. Minden $\varepsilon' > 0$ számhoz létezik $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - B\right| < \varepsilon'$; valamint létezik $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon'$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n > 2N$ esetén

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{N} |a_j| \left|\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right| + \sum_{j=N+1}^{n} |a_j| \left|\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N} |a_j|\, \varepsilon' + \sum_{j=N+1}^{n} |a_j|\, C \leq \varepsilon' \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| + C \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \varepsilon' A_a + C\varepsilon' = (C + A_a)\varepsilon'.$$

Vagyis tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(C + A_a)}$ és az ehhez választott N_1 és N_2 paraméterekhez tartozó $N' = 2\max\{N_1, N_2\}$ küszöbindex olyan lesz, hogy minden $n > N'$ számra

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right)\right| < \varepsilon,$$

vagyis a (4.1) képlet jobb oldalán lévő második tag is a nullához tart.
Most tegyük fel, hogy $\sum a$ és $\sum b$ is abszolút konvergens, és az eddigi jelöléseket egészítsük ki a $B_a = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ szimbólummal. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |a * b|\,(k) = \sum_{k=0}^{n} \left|\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} |a_l|\,|b_{k-l}| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{l=0}^{n-k} |b_l| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, B_a \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) B_a = A_a B_a,$$

vagyis a $\sum(a * b)$ sor abszolút konvergens.

4.8. Sorok pontonkénti szorzata

4.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat

- *korlátos változású*, ha a
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$
teljesül;
- *korlátos részletösszegű*, ha a
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \infty$$
teljesül.

4.19. Tétel. *(Abel-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos részletösszegű sorozat. Ekkor a $\sum_n a_n b_n$ sor konvergens, és*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat és

$$A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right),$$

valamint legyen $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos részletösszegű sorozat és

$$B = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right|.$$

A minden $n \in \mathbb{N}$ számra fennálló *Abel-átrendezés*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j \right) + a_n \sum_{j=0}^{n} b_j$$

igazolható n szerinti teljes indukcióval. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| (a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot \left| \sum_{j=0}^{k} b_j \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot B = AB,$$

ezért a $\sum_{k=0}^{n-1}\left((a_k - a_{k+1})\sum_{j=0}^{k} b_j\right)$ sor abszolút konvergens, vagyis konvergens is, és

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left((a_k - a_{k+1})\sum_{j=0}^{k} b_j\right)\right| \leq AB.$$

Az $n \mapsto a_n \sum_{j=0}^{n} b_j$ sorozat zérussorozat, mert az $n \mapsto \sum_{j=0}^{n} b_j$ sorozat korlátos és a zérussorozat. Ebből már adódik a bizonyítandó állítás.

4.9. Elemi függvények

4.8. Definíció. (*Elemi hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt a

$$\operatorname{Dom} P_a \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \text{a } \sum_{n} a_n x^n \text{ sor konvergens} \right\}$$

halmazon, az alábbi módon.

$$P_a : \operatorname{Dom} P_a \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt az a *együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

4.20. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat, és $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens, tehát $x \in \operatorname{Dom} P_a$.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens, tehát $x \notin \operatorname{Dom} P_a$.*

Bizonyítás. A 4.12 Cauchy-féle gyökkritérium közvetlen következménye.

4.21. Tétel. *Az alábbi hatványsorok konvergenciasugara végtelen, vagyis minden $x \in \mathbb{C}$ esetén konvergensek a sorok.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4.9. Definíció. (*Elemi függvények.*)

– Az *exponenciális függvény*

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

– A *szinusz függvény*

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz függvény*

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens függvény*

$$\mathrm{tg} : \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}.$$

– A *kotangens függvény*

$$\mathrm{ctg} : \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z \sin z \neq 0\ \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\mathrm{tg}\, z}.$$

– A *szinusz hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{th} : \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{ch}\, z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}.$$

– A *kotangens hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{cth} : \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{ch}\, z\, \mathrm{sh}\, z \neq 0\ \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\mathrm{th}\, z}.$$

4.22. Tétel. *(Euler-tétel.) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\exp(\mathrm{i}\, z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

Bizonyítás.

$$\cos z + \mathrm{i} \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} + \mathrm{i} \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} - \mathrm{i} \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\, z)^{4n}}{(4n)!} + \frac{(\mathrm{i}\, z)^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{(\mathrm{i}\, z)^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{(\mathrm{i}\, z)^{4n+3}}{(4n+3)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\, z)^{n}}{n!} = \exp(\mathrm{i}\, z).$$

4.10. Az exponenciális függvény és a hatványozás

4.23. Tétel. *(Az exponenciális függvény.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $\overline{\exp(x)} = \exp(\overline{x})$.*
2. *Minden $x, y \in \mathbb{C}$ számra $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.*
3. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.*
4. *Minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ számra $x_1 < x_2$ esetén $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ teljesül, vagyis az*

$$\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x)$$

függvény injektív.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{C}$ és $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Mivel az a sorozat konvergens, ezért

$$\overline{\exp(x)} = \overline{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\overline{x})^k}{k!} = \exp(\overline{x}).$$

2. Mivel a $\alpha_k = \frac{x^k}{k!}$ és $\beta_k = \frac{y^k}{k!}$ sorozatokból képzett sorok abszolút konvergensek, ezért Mertens-tétel alapján Cauchy-szorzatuk is konvergens lesz. Mivel

$$(\alpha * \beta)(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

ezért

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

3. Az előző pont alapján minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1.$$

4. Az exponenciális függvény definíciója alapján ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor $\exp(a) > 1$. Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$, akkor

$$\exp(x_2) = \exp(x_2 - x_1) \cdot \exp(x_1) > \exp(x_1).$$

4.10. Definíció. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *valós természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük, jele log vagy ln. Tehát $\operatorname{Dom}\log = \operatorname{Ran}(\exp|_{\mathbb{R}})$, és minden $x \in \operatorname{Dom}\log$ számra $\exp(\log x) = x$.

Megjegyzés. Később igazoljuk, hogy $\operatorname{Dom}\log = \mathbb{R}^+$.

◊

4.11. Definíció. Legyen $x \in \operatorname{Dom}\log$ és $z \in \mathbb{C}$. A

$$x^z \triangleq \exp(z\log(x))$$

számot *az x szám z-edik hatványának* nevezzük.

4.12. Definíció. Az $\exp(1)$ számot a *természetes alapú logaritmus alapszámának* nevezzük és az e betűvel jelöljük, vagyis $\mathrm{e} \triangleq \exp(1)$. (Értéke megközelítőleg $\mathrm{e} \approx 2,71828182845904523536$.)

4.24. Tétel. *Minden $z \in \mathbb{C}$ számra* $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.

Bizonyítás. Az e szám és a hatványozás definíciója alapján nyilvánvaló.

4.25. Tétel. *Legyen $x, y \in \operatorname{Dom}\log$ olyan szám, melyre $x^y \in \operatorname{Dom}\log$, és legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ekkor*

$$x^0 = 1, \qquad x^{z_1} \cdot x^{z_2} = x^{z_1+z_2}, \qquad x^{-z_1} = \frac{1}{x^{z_1}}, \qquad (x^y)^{z_1} = x^{yz_1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az állítások a hatványozás definíciójának és az exponenciális függvény multiplikativitásának közvetlen következményei.

4.26. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sorozatok határértéke megegyezik.*

Bizonyítás. Adott $x \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sorozatokat.

1. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a 3.31 tétel alapján az $a(x)$ sorozat konvergens, valamint a 4.21 tétel alapján a $b(x)$ sorozat konvergens, és definíció szerint $\lim b(x) = \exp x$. A binomiális kifejtés alapján

$$b(x)_n - a(x)_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\right) \cdot \frac{x^k}{k!}.$$

A teljes indukcióval könnyen bizonyítható $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ formula és a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt

$$\prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right) \geq 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Ezek alapján

$$1 - \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{k(k-1)}{2n},$$

vagyis

$$0 \leq b(x)_n - a(x)_n \leq \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{n} \cdot x^2 \exp x,$$

amiből a rendőrelv értelmében $\lim(b(x) - a(x)) = 0$ következik.
2. Ha $x < 0$, akkor a 3.31 tétel miatt $\lim a(x) = \frac{1}{\lim a(-x)}$, a 4.23 tétel miatt $\lim b(x) = \frac{1}{\lim b(-x)}$.
Mivel ekkor $-x > 0$, ezért az 1. pont alapján

$$\lim a(-x) = \lim b(-x),$$

amiből $\lim a(x) = \lim b(x)$ következik.

4.27. Tétel. *(Elemi függvények alaptulajdonságai.)*

– *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra az alábbiak teljesülnek.*

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

– *Minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
\operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)\operatorname{ch}(x)\\
\operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).
\end{aligned}$$

– *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\sin(i\,x) = i \operatorname{sh} x, \qquad \cos(i\,x) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh}(i\,x) = i \sin x, \qquad \operatorname{ch}(i\,x) = \cos x.$$

– *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

– *Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|e^{ix}| = 1$.*

Bizonyítás. Az 4.22 Euler-tétel alapján minden $x \in \mathbb{C}$ számra

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{és} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\cos(x) = \cos(-x)$ és $\sin(x) = -\sin(-x)$. Ebből adódik a sin és cos függvényre vonatkozó egyenlőség.
Az sh és a ch függvényekre vonatkozó egyenlőség a függvények sorfejtésének közvetlen következménye.
Az addíciós formulák, illetve a többi azonosság egyszerű számolással igazolható a sin, cos, sh és ch függvény exponenciális alakjából.

5 Valós függvények elemi vizsgálata

5.1. Függvények tulajdonságai

A függvények főbb tulajdonságait definiáljuk először.

5.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$, és $f(x) = f(-x)$;
- *páratlan*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$, és $f(x) = -f(-x)$;
- *monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \leq f(y)$;
- *monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \geq f(y)$;
- *monoton*, ha monoton növő, vagy monoton fogyó;
- *szigorúan monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$;
- *szigorúan monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$;
- *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó;
- *konvex az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén
$$f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$$
teljesül;
- *konkáv az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén
$$f(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$$
teljesül;
- *periodikus*, ha f nem konstans függvény, és ha létezik $p \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $x + p \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(x+p)$, amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú p szám nagyobb mint nulla, azt az *f függvény periódusának* nevezzük;
- *zérushelye* vagy *gyöke* $x \in \operatorname{Dom} f$, ha $f(x) = 0$.

5.1. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$
- *Az f függvény pontosan akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Elég a konvex esetre bizonyítani az állítást, hiszen az $f \mapsto -f$ transzformációval egymásba alakíthatók az állítások. Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1 \leq i \leq n}\, [0, 1]^n$ esetén, melyre $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ az
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor nyilván $n = 2$ is igaz a következtetés, ami éppen a konvexitás definícióját jelenti.
Tegyük fel, hogy az f függvény konvex, és az A halmaz álljon azokból az n természetes számokból, melyre igaz, hogy minden $(x_i)_{1\le i\le n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1\le i\le n} \in [0,1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Nyilván $1 \in A$, az f függvény konvexitása miatt $2 \in A$, és célunk annak igazolása, hogy $A = \mathbb{N}^+$. Ezt úgy érjük el, hogy megmutatjuk ha $n \in A$, akkor $n+1 \in A$. Legyen $n \in A$, $(x_i)_{1\le i\le n+1} \in I^n$ és legyen $(a_i)_{1\le i\le n+1} \in [0,1]^n$ olyan, melyre $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$. Ha $a_{n+1} = 1$, akkor nyilván teljesül az

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

egyenlőtlenség, ezért feltehető, hogy $a_{n+1} \ne 1$. Ebben az esetben azonban a

$$\frac{a_1}{1-a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{1-a_{n+1}} \in [0,1]$$

számok összege 1, valamint

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i \in I.$$

Ezért felhasználva az f függvény konvexitását, és az $n \in A$ feltételezést

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right) &= f\left((1-a_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i + a_{n+1}x_{n+1}\right) \le \\ &\le (1-a_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i\right) + a_{n+1} f(x_{n+1}) \le \\ &\le (1-a_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} f(x_i) + a_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f(x_i) \end{aligned}$$

adódik, vagyis $n+1 \in A$.

5.2. Függvény határértéke

5.2. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény $\operatorname{Dom} f$ értelmezési tartományának a torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f *függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

A fenti definíció szerint az $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $\operatorname{Dom} f$ halmaz $a \in \mathbb{R}$ torlódási torlódási pontjában $A \in \mathbb{R}$ a határértéke pontosan akkor, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \ (0 < |x-a| < \delta \ \rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül.

5.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

5.4. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *végtelen torlódási pontja*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A \ (\varepsilon < x).$$

Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *mínusz végtelen torlódási pontja*, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

5.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az *f függvény határértéke a végtelenben,*

– $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq B_\varepsilon(A) \big).$$

– *végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

– *mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

5.2. Tétel. *(A határérték egyértelműsége.)*

– *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

– *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ legyen az f függvény határértéke az a helyen. Ekkor $A = B$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$0 < |x - a| < \delta_A \ \to \ |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2}$$
$$0 < |x - a| < \delta_B \ \to \ |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a = \infty$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke a végtelenben. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$\delta_A < x \ \to \ |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2}$$

$$\delta_B < x \;\rightarrow\; |f(x) - B| < \frac{|A-B|}{2}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \max\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\mathrm{Dom}\, f) \cap]\delta, \infty[$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.
Ha $a = -\infty$, akkor a fentihez hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $A = B$.
A többi esetben is hasonló módon igazolható a határérték egyértelműsége.

5.6. Definíció. (A lim *művelet.*)

- Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$, és legyen $a \in \mathbb{C}$ a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.
- Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

5.3. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim\limits_{a} f = 0$, akkor $\lim\limits_{a} fg = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim\limits_{a} f = 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, g \cap (B_r(a) \setminus \{a\})$ esetén $|g(x)| < K$. Mivel $\lim\limits_{a} f = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, f \cap (B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\})$ esetén $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{K}$.
Ha $\delta = \min\{r, \delta_1\}$, akkor minden $x \in (\mathrm{Dom}\, g \cap \mathrm{Dom}\, f) \cap (B_r(a) \setminus \{a\})$ elemre

$$|f(x)g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

Vagyis $\lim\limits_{a}(fg) = 0$.

5.4. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ halmaznak. (Az a paraméter $\pm\infty$ is lehet.) Tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_{a} f$ és $\lim\limits_{a} g$, valamint $\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{a} g \notin \{\infty, -\infty\}$. Akkor az a pont*

1. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(f + g)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(f + g)$ létezik, és*
$$\lim_{a}(f + g) = \lim_{a} f + \lim_{a} g;$$
2. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(fg)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(fg)$ létezik, és*
$$\lim_{a}(fg) = \left(\lim_{a} f\right)\left(\lim_{a} g\right);$$
3. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(\lambda f)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(\lambda f)$ létezik, és*
$$\lim_{a}(\lambda f) = \lambda(\lim_{a} f);$$
4. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(|f|)$ halmaznak, $\lim\limits_{a} |f|$ létezik, és*
$$\lim_{a} |f| = \left|\lim_{a} f\right|;$$

5. *torlódási pontja a* $\mathrm{Dom}(\overline{f})$ *halmaznak,* $\lim\limits_a \overline{f}$ *létezik, és*

$$\lim_a \overline{f} = \overline{\lim_a f}.$$

6. *Ha az a pont torlódási pontja a* $\mathrm{Dom}\left(\frac{1}{f}\right)$ *halmaznak, és* $\lim\limits_a f \neq 0$*, akkor* $\lim\limits_a \frac{1}{f}$ *létezik, és*

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim\limits_a f}.$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $K = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ halmaznak, legyen $F = \lim\limits_a f \in \mathbb{R}$ és $G = \lim\limits_a g$, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
1. Az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\begin{aligned} &\forall x \in K : \; 0 < |x - a| < \delta_f \;\Rightarrow\; |f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\forall x \in K : \; 0 < |x - a| < \delta_g \;\Rightarrow\; |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in K : \; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |(f + g)(x) - (F + G)| \le |f(x) - F| + |g(x) - G| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (f + g) = F + G$.
2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : \; 0 < |x - a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - F| < k,$$

vagyis minden $0 < |x - a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |F| + k.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\begin{aligned} &\forall x \in K : \; 0 < |x - a| < \delta_f \;\Rightarrow\; |f(x) - F| < \varepsilon' \\ &\forall x \in K : \; 0 < |x - a| < \delta_g \;\Rightarrow\; |g(x) - G| < \varepsilon'. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} &|(fg)(x) - (FG)| = |f(x)g(x) - f(x)G + f(x)G - FG| \le |f(x)| \cdot |g(x) - G| + |G| \cdot |f(x) - F| \le \\ &\le (|F| + k) \cdot \varepsilon' + |G| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|F| + |G| + k) \le \varepsilon, \end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{|F| + |G| + k}$. Vagyis az ε, F, G és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd ahhoz választunk δ_f, δ_g mennyiségeket, és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda F| = |\lambda| \cdot |f(x) - F| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_a(\lambda f) = \lambda F$.

4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K: \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - F| < \varepsilon$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $0 < |x-a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} &||f(x)| - |F|| \le |f(x) - F| < \varepsilon \\ &\left|\overline{f(x)} - \overline{F}\right| = \left|\overline{f(x) - F}\right| = |f(x) - F| \le |f(x) - F| < \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a |f| = |F|$ és $\lim\limits_a \overline{f} = \overline{F}$.

6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $0 < |x-a| < \delta_1$ esetén $|f(x) - F| < \dfrac{|F|}{2}$. Ekkor minden $0 < |x-a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \dfrac{|F|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $0 < |x-a| < \delta_f$ esetén $|f(x) - F| < \dfrac{\varepsilon\,|F|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}\dfrac{1}{f}$ és $0 < |x-a| < \delta$ esetén

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F}\right| = \frac{|f(x) - F|}{|f(x)| \cdot |F|} < \frac{|f(x) - F|}{\frac{|F|}{2} \cdot |F|} < \frac{2}{|F|^2} \cdot \frac{\varepsilon\,|F|^2}{2} = \varepsilon.$$

5.5. Tétel. *Ha az $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \le g(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és létezik a $\lim\limits_a f, \lim\limits_a g$ határérték, akkor $\lim\limits_a f \le \lim\limits_a g$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ és vezessük be a $H = \operatorname{Dom} f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \le g(x)$, valamint létezik a $\lim\limits_a f, \lim\limits_a g$ határérték. Legyen $F = \lim\limits_a f$, $G = \lim\limits_a g$, és tegyük fel, hogy $G < F$. Az $\varepsilon = \dfrac{F - G}{2}$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ esetén, ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \varepsilon$ és $|g(x) - G| < \varepsilon$. Vagyis $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén az $F - \varepsilon < f(x)$ egyenlőtlenség miatt $\dfrac{F+G}{2} < f(x)$, és a $g(x) < G + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $g(x) < \dfrac{F+G}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $f(x) \le g(x)$.

5.6. Tétel. *(Rendőr-elv függvények határértékére.) Ha az $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \le g(x) \le h(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és valamely $A \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = A$ teljesül, akkor létezik a $\lim\limits_a g$ határérték és $\lim\limits_a g = A$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ teljesül és vezessük be a $H = \operatorname{Dom} f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \le g(x) \le h(x)$ teljesül, valamint $A \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = A$. Bevezetve az $\alpha = g - f$ és a $\beta = h - f$ függvényeket, minden $x \in H$ esetén $0 \le \alpha(x) \le \beta(x)$ teljesül. A $\lim\limits_a \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén $-\varepsilon < \beta(x) < \varepsilon$. A $0 \le \alpha(x) \le \beta(x)$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha(x)| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim\limits_a \alpha = 0$. Ekkor a $g = \alpha + f$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban és $\lim\limits_a g = \lim\limits_a \alpha + \lim\limits_a f = A$.

5.7. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja. A $\lim_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_z f = F \in \mathbb{R}$ határérték, és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$ a z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \ 0 < |x - z| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - F| < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - F| < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = F$.
Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat, valamint

$$a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\},\ |f(x) - A| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\},\ |f(x) - A| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}\, f \setminus \{z\}$ sorozat, melynek határértéke z. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - A| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

5.3. Féloldali határérték

5.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$.
– Ha a torlódási pontja az $]a, \infty[\cap \mathrm{Dom}\, f$ halmaznak, és az $f|_{]a,\infty[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]a,\infty[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény jobb oldali határértéke az a pontban A*, és az A határértéket a $\lim_{a+} f$ vagy a $\lim_{x\to a+0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

– Ha a torlódási pontja a $]-\infty, a[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak, és az $f|_{]-\infty,a[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]-\infty,a[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény bal oldali határértéke az a pontban A*, és az A határértéket a $\lim\limits_{a-} f$ vagy a $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a, A \in \mathbb{R}$. A fenti definíció szerint az f függvénynek a jobb oldali határértéke az a pontban A, pontosan akkor, ha a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap]a, \infty[$ halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f: \ (a < x < a + \delta \ \to \ |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül. Hasonlóan, az f függvénynek a bal oldali határértéke az a pontban A, pontosan akkor, ha a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap]-\infty, a[$ halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f: \ (a - \delta < x < a \ \to \ |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül.

5.8. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, ha ott létezik jobb, illetve bal oldali határértéke, és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a-} f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és tegyük fel, hogy az a pontban létezik az f függvénynek határértéke. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon$$

teljesül. Ekkor minden $x \in]a - \delta, a[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon,$$

vagyis létezik $\lim\limits_{a-} f$ és $\lim\limits_{a-} f = \lim\limits_a f$. Hasonlóan igazolható, hogy létezik $\lim\limits_{a+} f$ és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_a f$.
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és tegyük fel, hogy az f függvénynek az a pontban létezik jobb, illetve bal oldali határértéke, és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a-} f$ teljesül. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a - \delta_1, a[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_{a-} f \right| < \varepsilon$$

teljesül, és létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a, a + \delta_2[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_{a+} f \right| < \varepsilon.$$

Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor $A = \lim\limits_{a-} f = \lim\limits_{a+} f$ olyan szám, hogy minden $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ esetén

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

vagyis létezik $\lim\limits_a f$ határérték és $\lim\limits_a f = A$.

5.4. Függvény folytonossága

5.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$. Az A halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A, \mathbb{R}) \stackrel{\triangle}{=} \{ f : A \to \mathbb{R} |\ f \text{ folytonos} \}$$

jelölést használjuk.

5.9. Tétel. *Legyen* $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{R}$. *Ha az f és g függvény folytonos az a pontban, akkor az*

$$f + g, fg, cf, |f|, \overline{f}$$

függvények is folytonosak az a pontban, valamint ha $f(a) \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{f}$ *függvény is folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in K = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{R}$, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. A $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in K : \ |x - a| < \delta_f \ &\Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall x \in K : \ |x - a| < \delta_g \ &\Rightarrow \ |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |(f+g)(x) - (f+g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $(f + g)$ függvény folytonos az a pontban.

2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : \ |x - a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < k,$$

vagyis minden $|x - a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |f(a)| + k.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in K : \ |x - a| < \delta_f \ &\Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon' \\ \forall x \in K : \ |x - a| < \delta_g \ &\Rightarrow \ |g(x) - g(a)| < \varepsilon'. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $|x - a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \leq \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(a)| + |g(a)| \cdot |f(x) - f(a)| \leq \\ &\leq (|f(a)| + k) \cdot \varepsilon' + |g(a)| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|f(a)| + |g(a)| + k) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{|f(a)| + |g(a)| + k}$. Vagyis az ε, $f(a)$, $g(a)$ és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd ahhoz választunk δ_f, δ_g mennyiségeket, és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. A $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $|x - a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(a)| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

Vagyis a λf függvény folytonos az a pontban.
4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : \; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $|x - a| < \delta$ esetén

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
$$\left|\overline{f(x)} - \overline{f(a)}\right| = \left|\overline{f(x) - f(a)}\right| = |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $|f|$ és a $\overline{f}$ függvény folytonos az a pontban.
6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $|x - a| < \delta_1$ esetén $|f(x) - f(a)| < \dfrac{|f(a)|}{2}$. Ekkor minden $|x - a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \dfrac{|f(a)|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $|x - a| < \delta_f$ esetén $|f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon\,|f(a)|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f}$ és $|x - a| < \delta$ esetén

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right| = \frac{|f(x) - f(a)|}{|f(x)| \cdot |f(a)|} < \frac{|f(x) - f(a)|}{\frac{|f(a)|}{2} \cdot |f(a)|} < \frac{2}{|f(a)|^2} \cdot \frac{\varepsilon\,|f(a)|^2}{2} = \varepsilon.$$

5.10. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor minden $f, g \in C(A, \mathbb{R})$ elemre és minden $c \in \mathbb{R}$ számra*

$$f + g, fg, cf, |f|, \overline{f} \in C(A, \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Az előző állítás kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

5.11. Tétel. *Folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g \;\; |y - f(a)| < \delta_g \;\Rightarrow\; |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f \;\; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

5.12. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik, és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{array}{lrcl} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : & 0 < |x-a| < \delta & \to & |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : & |x-a| < \delta & \to & |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{array}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

5.13. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_b g = c$ és a torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \operatorname{Dom} g$;*
2. *$b \in \operatorname{Dom} g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_b g = c$ és a torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.
Először tegyük fel, hogy $b \notin \operatorname{Dom} g$. A $\lim\limits_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim\limits_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek és $g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) = g\left(B_{\delta'}(b)\right)$ miatt

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.
Most tegyük fel, hogy $b \in \operatorname{Dom} g$ és g folytonos a b pontban. A g függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b)\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim\limits_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.

5.14. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \operatorname{Dom}(f)$. Az f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom}(f)$, z ponthoz konvergáló sorozatra létezik a $\lim f \circ a$ határérték és $\lim f \circ a = f(z)$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $z \in \mathrm{Dom}(f)$, tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az z pontban, és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f)$, z ponthoz konvergáló sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \; |x - z| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(z)$.
Visszafelé úgy bizonyítjuk az implikációt hogy feltesszük, hogy f nem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f |\; x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\; |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f |\; x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\; |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}\, f$ sorozat, melynek határértéke z. Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - f(z)| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f)$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

5.15. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazhoz létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \mathrm{Dom}\, f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \mathrm{Dom}\, f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $K = \mathrm{Dom}\, f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_\delta(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

2 ⇒ 3 Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz. Ekkor $\mathbb{R} \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{R} \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{R} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{R} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{R} \setminus (U \cap K)) = K \cap ((\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{R} \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{R}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = \mathbb{R} \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.
3 ⇒ 2 Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{R} \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{R} \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{R} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{R} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{R} \setminus (Z \cap K)) = K \cap ((\mathbb{R} \setminus Z) \cup (\mathbb{R} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{R} \setminus Z)$$

teljesül, ahol ugyancsak felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{R}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = \mathbb{R} \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

5.16. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

5.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek az a pontban szakadása van*, ha a függvény nem folytonos az a pontban.
- Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek az a pontban elsőfajú szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$, de $\lim\limits_{a-} f \neq f(a)$ vagy $\lim\limits_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek az a pontban megszüntethető szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$, és $\lim\limits_{a-} f = \lim\limits_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek az a pontban másodfajú szakadása van*, f nem folytonos az a pontban, és nincs elsőfajú szakadása az a pontban.

5.5. Függvény folytonosságának elemi következményei

5.17. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a 5.15 folytonosság topologikus jellemzése alapján, minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i\in I}(V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i$$

teljesül, ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in J} f(V_i) \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

5.18. Tétel. *(Weierstrass tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$ melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 5.17 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a valós számokra vonatkozó 2.21 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.

5.19. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos injektív függvény. Ekkor a 5.17 tétel alapján a $K' = f(K)$ halmaz is kompakt. A 5.15 tétel felhasználásával úgy igazoljuk, hogy a $g = f^{-1}$ függvény folytonos. Megmutatjuk, hogy minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{g}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} g$ teljesül. Az f függvény injektivitása miatt $\overset{-1}{g}(A) = f(A)$. Az $A \cap K$ halmaz zárt és korlátos, ezért kompakt, valamint az f függvény folytonossága miatt $f(A \cap K)$ is kompakt halmaz, vagyis zárt. Legyen $Z = f(A \cap K)$. Mivel $\operatorname{Dom} g = K'$ és $Z \subseteq K'$, ezért $\overset{-1}{g}(A) = f(A) = f(A \cap K) = Z \cap \operatorname{Dom} g$.

5.20. Tétel. *(Bolzano-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $c \in \,]a, b[$, melyre $f(c) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Legyen

$$H = \{z \in [a, b] \mid \forall x \in [a, z] : \; f(x) < 0\}.$$

Ekkor H korlátos halmaz, tehát létezik szuprémuma, legyen $c = \sup H$.
Megmutatjuk, hogy $c \notin \{a, b\}$. Ha $c = a$, akkor az f függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]a, a + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $c = b$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]b - \delta, b[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak.
Végül igazoljuk, hogy $f(c) = 0$. Ha $f(c) < 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $f(c) > 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak. Mivel $f(c) > 0$ és $f(c) < 0$ is lehetetlen, ezért $f(c) = 0$.

5.21. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ekkor* $\operatorname{Ran} f$ *nyílt intervallum és f^{-1} folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növő függvény. Szigorúan monoton csökkenő függvényre teljesen hasonló a bizonyítás.
Először megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ran} f$ intervallum. Ehhez legyen $y_1, y_2 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges olyan pont, melyre $y_1 < y_2$. Legyen $x_1, x_2 \in I$ olyan, hogy $f(x_1) = y_1$ és $f(x_2) = y_2$. Ha $c \in]y_1, y_2[$, akkor a

$$h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) - c$$

folytonos függvényre $h(x_1)h(x_2) < 0$ teljesül, tehát a Bolzano-tétel alapján létezik olyan $x \in]x_1, x_2[$, hogy $f(x) = c$, vagyis $c \in \operatorname{Ran} f$. Ezért minden $y_1, y_2 \in \operatorname{Ran} f$, $y_1 \le y_2$ esetén $[y_1, y_2] \subseteq \operatorname{Ran} f$ teljesül, amiből már következik, hogy $\operatorname{Ran} f$ intervallum.
Most megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ran} f$ nyílt halmaz. Ehhez legyen $y_0 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges pont, és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$. Legyen $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$. Mivel f szigorúan monoton növő, ezért $y_1 < y_0 < y_2$. Legyen $r = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. Ekkor $B_r(y_0) \subseteq]y_1, y_2[$, és az elöbbi megállapítás alapján $\operatorname{Ran} f$ intervallum, ezért $B_r(y_0) \subseteq \operatorname{Ran} f$, vagyis y_0 belső pontja a $\operatorname{Ran} f$ halmaznak.
Végül megmutatjuk, hogy f^{-1} folytonos. Ehhez legyen $y_0 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges pont, és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$. Legyen $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$ és tekintsük az

$$f|_{[a,b]} : [a, b] \to [y_1, y_2] \qquad x \mapsto f(x)$$

függvényt. Mivel ez folytonos bijekció, ezért a 5.19 tétel alapján az inverze is folytonos. Mivel $y_0 \in \operatorname{Int}[y_1, y_2] = \operatorname{Int}\operatorname{Dom}\left(f|_{[a,b]}\right)^{-1}$, valamint $f^{-1}|_{[y_1,y_2]} = \left(f|_{[a,b]}\right)^{-1}$ ezért az $f^{-1}|_{[y_1,y_2]}$ függvény is folytonos az y_0 pontban, vagyis az f^{-1} függvény is folytonos az y_0 pontban.

5.6. Függvény egyenletes folytonossága

5.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(|x - y| < \delta \ \to\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

5.22. Tétel. *Minden egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvény, és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x - y| < \delta \ \to\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

5.23. Tétel. *(Heine tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\delta(x)}{2} | \; x \in H\right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A "háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|y - p| \leq |y - x| + |x - p| < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \leq \delta(p),$$

ezért

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(p)| + |f(p) - f(y)| < \varepsilon.$$

5.7. Hatványsorok határértéke

5.24. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat, és tekintsük az R_a konvergenciasugarú P_a hatványsort. Ekkor $R_a > 0$ esetén, minden $z \in B_{R_a}(0)$ elemre $\lim_{x \to z} P_a(x) = P_a(z)$ teljesül, vagyis a hatványsor folytonos a $B_{R_a}(0)$ halmazon.*

5.8. Elemi függvények folytonossága

5.25. Tétel. *Az* exp, sin, cos, tg, ctg, sh, ch, th *és* cth *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az előző állítás és a 4.14 tétel miatt nyilvánvaló.

5.26. Tétel. *(Nevezetes határértékek.)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bizonyítás. Az exponenciális és a szinusz függvény hatványsorából adódik.

5.27. Tétel. *Az* $\exp|_{\mathbb{R}}$ *függvényre* $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ *teljesül, valamint a a* log *függvényre* $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$ *teljesül.*

Bizonyítás. Csak a $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ állítást kell igazolni, hiszen a log függvény az exp függvény inverze. Legyen $a > 1$. Ekkor tekintsük a folytonos

$$\varphi : [0, a] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \exp(x) - a$$

függvényt. Mivel $\varphi(0) = 1 - a < 0$ és $\varphi(a) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} > a$ ezért a 5.20 Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x_0 \in [0, a]$ pont, melyre $\varphi(x_0) = 0$, vagyis $\exp(x_0) = a$ teljesül. Tehát $a \in \operatorname{Ran}\exp$.
Ha $0 < a < 1$, akkor $1 < \frac{1}{a} \in \operatorname{Ran}\exp$, tehát létezik olyan x_0, melyre $\exp(x_0) = \frac{1}{a}$. Mivel $\exp(-x_0) = \frac{1}{\exp(x_0)} = a$, ezért $a \in \operatorname{Ran}\exp$.

5.28. Tétel. *(A logaritmus függvény.) A* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos, szigorúan monoton növő bijektív függvény.*

Bizonyítás. A 5.27 tétel alapján $\operatorname{Dom}\log = \mathbb{R}^+$, valamint mivel $\operatorname{Dom}\exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, és $(\exp|_{\mathbb{R}})^{-1} = \log$, ezért $\operatorname{Ran}\log = \mathbb{R}$. A 4.23 tétel alapján az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény szigorúan monoton növő, ezért a log függvény is szigorúan monoton növő vagyis injektív függvény. Ezek alapján a $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény bijekció.
Mivel $\exp|_{\mathbb{R}}$ nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 5.21 tétel alapján az inverze is folytonos, vagyis a log függvény folytonos.

5.29. Tétel. *(A hatványfüggvény folytonossága.) Minden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén az*

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^{\alpha}$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter. Mivel a $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, az

$$M_{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \alpha x$$

és az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény folytonos, ezért az $\exp \circ M_{\alpha} \circ \log$ függvény is folytonos, ami pedig éppen az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha}$ függvény.

5.30. Tétel. *(A π szám bevezetése.)*

1. *Minden* $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ *esetén* $\sin x > 0$.
2. *A* $\cos$ *függvény szigorúan monoton csökkenő a* $\left]0, \sqrt{3}\right[$ *intervallumon.*
3. $\cos\sqrt{3} < -\frac{1}{8}$
4. *Létezik egyetlen olyan* $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ *szám, melyre* $\cos x = 0$ *teljesül.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, ekkor

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \cdots = \\
&= x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{5!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{10 \cdot 11}\right) + \cdots \geq \\
&\geq x\left(1 - \frac{3}{6}\right) + \frac{x^5}{5!} \cdot \left(1 - \frac{3}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!} \cdot \left(1 - \frac{3}{10 \cdot 11}\right) + \cdots \geq \\
&\geq x\left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{x}{2} > 0.
\end{aligned}$$

2. A 4.27 tételben szereplő addíciós formulák alapján minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right).$$

Tehát elég azt megmutatni, hogy az $x_1, x_2 \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, $x_1 < x_2$ esetben $\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$ és $\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$. Mivel $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2-x_1}{2} \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, ezért az első pont alapján $\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$, valamint $\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$.

3. A cos függvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}\cos\sqrt{3} &= 1 - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{4!} - \left(\frac{3^3}{6!} - \frac{3^4}{8!}\right) - \left(\frac{3^5}{10!} - \frac{3^6}{12!}\right) - \dots = \\ &= -\frac{1}{8} - \frac{3^3}{6!}\left(1 - \frac{3}{7\cdot 8}\right) - \frac{3^5}{10!}\left(1 - \frac{3}{11\cdot 12}\right) - \dots < -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

adódik.

4. A cos függvény folytonossága miatt a Bolzano-tétel alapján adódik, hogy létezik olyan $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ szám, melyre $\cos x = 0$, valamint a cos függvény $\left[0, \sqrt{3}\right]$ intervallumon való szigorú monotonitásából adódik, hogy legfeljebb egy ilyen x szám létezhet ebben az intervallumban.

5.11. Definíció. Legyen $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ az a szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül, ekkor a $\pi \stackrel{\triangle}{=} 2x$ számot *Ludolf-féle számnak* vagy *pi-nek* nevezzük és a görög π (pi) betűvel jelöljük.
(Értéke megközelítőleg $\pi \approx 3.14159265358979323 85$.)

Megjegyzés. A fenti tételben szereplő számoláshoz hasonlóan igazolható, hogy $\cos\frac{3}{2} > 0$, és egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\sqrt{3} < 1,74$. Tehát eddigi eredményeink alapján $3 < \pi < 3,48$ adódik. ◊

5.9. Trigonometrikus függvények tulajdonságai

5.31. Tétel. *(Nevezetes szögek.)*

– *A* $\frac{\pi}{2}$ *és a* π *szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

– *Minden* $x \in \mathbb{C}$ *esetén*

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x\end{aligned}$$

– *Minden* $x \in \mathbb{C}$ *számra*

$$\mathrm{e}^{x+2\pi\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x, \qquad \mathrm{sh}(x+2\pi\,\mathrm{i}) = \mathrm{sh}\,x, \qquad \mathrm{ch}(x+2\pi\,\mathrm{i}) = \mathrm{ch}\,x.$$

– *A* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ *és a* $\frac{\pi}{3}$ *szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bizonyítás. 1. A $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ a π szám definíciója alapján teljesül. Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért $\sin\frac{\pi}{2} \in \{-1, 1\}$. A 5.30 tétel alapján $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, ezért $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. A $\sin\pi$ és a $\cos\pi$ érték a 4.27 tételben szereplő addíciós formulával igazolható.
2–3. Az egyenlőségek a 4.27 tételben szereplő addíciós formulákkal igazolhatók.
4. Legyen $a = \sin\frac{\pi}{6}$ és $b = \cos\frac{\pi}{6}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin\frac{2\pi}{6} = 2ab \quad \text{és} \quad \cos\frac{2\pi}{6} = b^2 - a^2,$$

valamint

$$\sin\frac{3\pi}{6} = 3ab^2 - a^3 \quad \text{és} \quad \cos\frac{3\pi}{6} = b^3 - 3a^2 b.$$

A $\frac{\pi}{2}$ szinuszát és koszinuszát az 1. pont alapján beírva az

$$1 = 3ab^2 - a^3 \quad \text{és} \quad 0 = b^3 - 3a^2 b.$$

egyenletrendszer adódik. Ha a $b = 0$ teljesülne, akkor az első egyenlet alapján $a < 0$ teljesülne, azonban $\frac{\pi}{6} \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, ezért a 5.30 tétel alapján $a > 0$. Tehát $b \neq 0$. A második egyenlet miatt ekkor $b^2 = 3a^2$, amit az első egyenletbe írva $1 = 8a^3$ adódik. Innen már a és b értéke egyszerűen számolható. A $\sin\frac{\pi}{3}$ és a $\cos\frac{\pi}{3}$ értéke számolható a $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$ összefüggésre alkalmazott addíciós formulákból.
Legyen $a = \sin\frac{\pi}{4}$ és $b = \cos\frac{\pi}{4}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin\frac{2\pi}{4} = 2ab \quad \text{és} \quad \cos\frac{2\pi}{4} = b^2 - a^2,$$

tehát

$$1 = 2ab \quad \text{és} \quad 0 = b^2 - a^2.$$

Mivel $\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4} > 0$, ezért a második egyenletből $a = b$ adódik, amiből pedig $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kiegészítés. A függelékben a nevezetes szögekről szóló 5.31 tétel bizonyításához hasonló gondolatmenettel igazoljuk még a

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \qquad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

egyenlőséget (9.6 tétel) és megadjuk $\sin\frac{\pi}{17}$ és $\cos\frac{\pi}{17}$ értékét is. A következő tétel megmutatja, hogy mely α szögek esetén fejezhető ki $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$.

5.12. Definíció. *Fermat-prímeknek* nevezzük az $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ $(n \in \mathbb{N})$ alakú prímszámokat.

Az eddig ismert Fermat-prímek: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ és $F_4 = 65537$. Nem ismert, hogy létezik-e ezeken kívül Fermat-prím.

5.32. Tétel. *Pontosan azon $x \in \mathbb{R}$ számok esetén fejezhető ki $\sin x$ és $\cos x$ értéke az összeadás, a szorzás, az osztás és a négyzetgyökvonás műveletek véges kombinációjával, ha*

$$x = \frac{m\pi}{2^n \cdot \prod_{i=0}^{k} F_i^{n_i}}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{N}$, F_i az i-edik Fermat-prím, és minden $i = 0, \ldots, k$ esetén $n_i \in \{0, 1\}$.

$\Diamond$

5.33. Tétel. *(Euler képlet.)* $e^{i\pi} = -1$

Bizonyítás. A 5.31 és a 4.22 Euler-tétel következménye.

5.34. Tétel. *(Trigonometrikus függvények periódusa.)*

1. *Minden* $x \in]0, \pi[$ *esetén* $\sin x > 0$*, minden* $x \in]\pi, 2\pi[$ *esetén* $\sin x < 0$*.*
2. *A* $\sin x = 0$ *egyenletnek* $x \in [0, 2\pi[$ *esetén* $x \in \{0, \pi\}$ *az összes megoldása.*
3. *A* $\sin$ *függvény periódusa* 2π*.*
4. *Minden* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *esetén* $\cos x > 0$*, minden* $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ *esetén* $\cos x < 0$*.*
5. *A* $\cos x = 0$ *egyenletnek* $x \in [0, 2\pi[$ *esetén* $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ *az összes megoldása.*
6. *A* $\cos$ *függvény periódusa* 2π*.*

Bizonyítás. 1. A 5.31 tétel alapján minden $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ számra $\sin x > 0$. Ha $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, akkor az előző megállapítás és a $\sin x = \sin(\pi - x)$ azonosság miatt $\sin x > 0$. Mivel $\sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0$, ezért minden $x \in]0, \pi[$ esetén $\sin x > 0$. Ha $x \in]\pi, 2\pi[$, akkor a $\sin x = -\sin(x - \pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\sin x < 0$.
2. Az 1. pont és a 5.31 tétel alapján nyilvánvaló.
3. Tegyük fel, hogy létezik a sin függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p. Ekkor $p \in]0, 2\pi[$, valamint $0 = \sin 0 = \sin(0 + p)$. A 2. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} \neq \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = -1$$

miatt π sem lehet a periódus. Tehát a sin függvény legkisebb periódusa 2π.
4. A 5.31 tétel alapján minden $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x > 0$, továbbá a cos függvény párossága és $\cos 0 = 1$ miatt minden $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x > 0$. Ha $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, akkor a $\cos x = -\cos(x - \pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\cos x < 0$.
5. Az előző pont alapján ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, akkor $\cos x > 0$; ha $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, akkor $\cos x < 0$; ha $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, akkor $\cos x = -\cos(x - \pi)$ miatt $\cos x > 0$. Tehát a $\cos x = 0$ egyenletnek a $[0, 2\pi[$ intervallumon csak $\frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2}$ lehet a megoldása, és a 5.31 tétel alapján ezek valóban megoldások.
6. Tegyük fel, hogy létezik a cos függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p. Ekkor $p \in]0, 2\pi[$, valamint $0 = \cos -\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + p\right)$. A 4. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban $1 = \cos 0 \neq \cos(0 + p) = -1$ miatt π sem lehet a periódus. Tehát a cos függvény legkisebb periódusa 2π.

5.35. Tétel. *Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.*

1. *A* $\cos$ *függvény szigorúan monoton csökkenő a* $[0, \pi]$ *intervallumon és*

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \cos x$$

bijekció.

2. A sin *függvény szigorúan monoton növő a* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon és*

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \qquad x \mapsto \sin x$$

bijekció.

3. A tg *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz, valamint szigorúan monoton növő a* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *intervallumon és*

$$\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{tg} x$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Ha $0 \le x_1 < x_2 \le \pi$, akkor $0 < \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2-x_1}{2} < \pi$ miatt a 5.34 tétel alapján $\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), \sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0,\pi]$ halmazon. Mivel $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ és a cos függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran}\cos|_{[0,\pi]} = [-1,1]\,.$$

A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.

2. Ha $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$, akkor $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ miatt a 5.34 tétel alapján $\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$, valamint $0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \pi$ miatt $\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\sin x_1 - \sin x_2 = -2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a sin függvény szigorúan monoton növő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon. Mivel $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ és a sin függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran}\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} = [-1,1]\,.$$

A $\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.

3. A $\cos z = 0$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásához legyen $z = a + \mathrm{i}\, b$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. A $\cos(a + \mathrm{i}\, b) = 0$ egyenlet a 4.27 tétel alapján

$$\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\, a - 2b} = -1$$

alakban íható fel, ami a 4.22 alapján az

$$\mathrm{e}^{-2b}\left(\cos(2a) + \mathrm{i}\sin(2a)\right) = -1$$

egyenlethez vezet. A két oldal abszolútértékét véve $\mathrm{e}^{-2b} = 1$ adódik, vagyis $b = 0$. A fenti egyenlet valós és képzetes részét véve az

$$\cos(2a) = -1 \qquad \sin(2a) = 0$$

egyenleteket kapjuk. Keressük ennek a megoldását a $2a \in [0, 2\pi[$ feltétel mellett. Ekkor a 5.34 tétel második pontja alapján a $\sin(2a) = 0$ egyenletből $2a = 0$ vagy $2a = \pi$ következik. A $2a = 0$ esetben $\cos(2a) \neq -1$, a $2a = \pi$ esetben azonban $\cos(2a) = -1$. Tehát a $[0, 2\pi[$ intervallumban egyetlen megoldás van $a = \frac{\pi}{2}$. A trigonometrikus függvények 2π szerinti periodicitása miatt a $\cos z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

vagyis $\operatorname{Dom} \operatorname{tg} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Legyen $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Ekkor $0 < x_2 - x_1 < \pi$, tehát a 5.34 tétel 1. pontja alapján $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2 = \frac{-1}{\cos x_1 \cos x_2} \sin(x_2 - x_1)$$

trigonometrikus azonosság alapján a tg függvény szigorúan monoton növő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon.

A tg függvény páratlan és $\operatorname{tg} 0 = 0$ ezért $\operatorname{Ran} \operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} = \mathbb{R}$ igazolásához elég megmutatni, hogy minden $y \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, melyre $\operatorname{tg} x = y$ teljesül. Legyen $y \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ és a sin függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \left]\frac{\pi}{2} - \delta_1, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\sin x > \frac{1}{2}$. Mivel $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ és a cos függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \left]\frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x < \frac{1}{2y}$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ és $x_0 \in \left]\frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2}\right[$ tetszőleges pont. Ekkor $\sin x_0 > \frac{1}{2}$ és $\cos x_0 < \frac{1}{2y}$, tehát

$$\operatorname{tg} x_0 = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2y}} = y.$$

A folytonos tg függvényre a $[0, x_0]$ intervallumon $\operatorname{tg} 0 < y < \operatorname{tg} x_0$ teljesül, vagyis a Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x \in]0, x_0[$, melyre $\operatorname{tg} x = y$, ezért $y \in \operatorname{Ran} \operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.

5.13. Definíció. *Elemi függvények inverzei.*

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét *arkusz szinusz függvénynek* nevezzük, jele arcsin, vagyis
$$\arcsin \triangleq \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$
2. A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény inverzét *arkusz koszinusz függvénynek* nevezzük, jele arccos, vagyis
$$\arccos \triangleq \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$
3. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét *arkusz tangens függvénynek* nevezzük, jele arctg, vagyis
$$\operatorname{arctg} \triangleq \left(\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}.$$

5.36. Tétel. *Az* arcsin *az* arccos *és az* arctg *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az arcsin és az arccos függvény a 5.19 tétel alapján folytonos. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ függvény nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 5.21 tétel alapján az inverze is folytonos.

5.10. Hiperbolikus függvények tulajdonságai

5.37. Tétel. *Hiperbolikus függvények monotonitása.*

1. A ch *függvény szigorúan monoton növő a* $[0,\infty[$ *halmazon és*

$$\operatorname{ch}|_{[0,\infty[} : [0,\infty[\to [1,\infty[\qquad x \mapsto \operatorname{ch} x$$

bijekció.

2. Az sh *függvény szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*

$$\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{sh} x$$

bijekció.

3. A th *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ *halmaz, szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*

$$\operatorname{th}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to]-1,1[\qquad x \mapsto \operatorname{th} x$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Megmutatjuk, hogy $0 < x$ esetén $0 < \operatorname{sh} x$. Ekkor a $q = \mathrm{e}^x$ jelöléssel $1 < q$ adódik, és az igazolandó

$$\frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right) > 0$$

egyenlőtlenség következik az $1 < q^2$ egyenlőtlenségből. Ha $0 \le x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2}$, ezért a

$$\operatorname{ch} x_1 - \operatorname{ch} x_2 = -2 \operatorname{sh}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

azonosság alapján a ch függvény szigorúan monoton növő a $[0,\infty[$ halmazon.
Most igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén $\operatorname{ch} x > 1$. A $q = \mathrm{e}^x$ jelöléssel $1 < q$, és ekkor

$$\operatorname{ch} x > 1 \quad \leftrightarrow \quad q + \frac{1}{q} - 2 > 0 \quad \leftrightarrow \quad (q-1)^2 > 0.$$

Legyen $q \in [1,\infty[$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in [0,\infty[$, melyre $\operatorname{ch} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} &= 2q \\ (\mathrm{e}^x)^2 - 2q\,\mathrm{e}^x + 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^x &= \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 - 4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 - 1} \end{aligned}$$

Mivel $q + \sqrt{q^2 - 1} \ge 1$, ezért $q + \sqrt{q^2 - 1} \in \operatorname{Dom} \log$, sőt $\log\left(q + \sqrt{q^2 - 1}\right) \ge 0$, vagyis az

$$x = \log\left(q + \sqrt{q^2 - 1}\right) \in [0,\infty[$$

számra $\operatorname{ch} x = q$ teljesül.
A ch függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.
2. Mivel minden $x \in [0,\infty[$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$ és a ch függvény páros, ezért minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$\operatorname{ch} x > 0$. Ha $\leq x_1 < x_2$, akkor $0 < \dfrac{x_2 - x_1}{2}$, vagyis az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh}\left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$, ezért a

$$\operatorname{sh} x_1 - \operatorname{sh} x_2 = -2 \operatorname{ch}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

azonosság alapján az sh függvény szigorúan monoton növő a valós számok halmazán.
Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, melyre $\operatorname{sh} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2q \\ (\mathrm{e}^x)^2 - 2q\,\mathrm{e}^x - 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^x &= \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 + 4}}{2} = q \pm \sqrt{1 + q^2} \end{aligned}$$

Mivel $q + \sqrt{1 + q^2} > 0$, ezért $q + \sqrt{1 + q^2} \in \operatorname{Dom} \log$, vagyis az

$$x = \log\left(q + \sqrt{1 + q^2}\right) \in \mathbb{R}$$

számra $\operatorname{sh} x = q$ teljesül.
Az sh függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.
3. A $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet a 4.27 tétel alapján a $\cos(\mathrm{i}\, z) = 0$ egyenlettel ekvivalens, vagyis a 5.35 tétel alapján a $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{ \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

vagyis $\operatorname{Dom} \operatorname{th} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Legyen $x_1 < x_2$. Ekkor $0 < x_2 - x_1$, tehát az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh}(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\operatorname{th} x_1 - \operatorname{th} x_2 = \frac{-1}{\operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2} \operatorname{sh}(x_2 - x_1)$$

azonosság alapján a th függvény szigorúan monoton növő a valós számok halmazán.
Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a

$$\operatorname{th} x < 1 \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \quad \leftrightarrow \quad 0 < \mathrm{e}^{-x}$$

ekvivalencia alapján $\operatorname{th} x < 1$, valamint a

$$-1 < \operatorname{th} x \quad \leftrightarrow \quad -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \quad \leftrightarrow \quad 0 < \mathrm{e}^x$$

ekvivalencia alapján $\operatorname{th} x < -1$.
A fenti bizonyításokhoz hasonlóan adott $q \in]-1, 1[$ megkeressük azt az $x \in \mathbb{R}$ számot, melyre $\operatorname{th} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} &= q \\ \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} &= q \\ \mathrm{e}^{2x} - 1 &= q\,\mathrm{e}^{2x} + q \end{aligned}$$

$$e^{2x} = \frac{1+q}{1-q}$$

Mivel $\frac{1+q}{1-q} > 0$, ezért $\frac{1+q}{1-q} \in \operatorname{Dom}\log$, vagyis az

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+q}{1-q}\right)$$

számra $\operatorname{th} x = q$ teljesül.
Az th függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

5.14. Definíció. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

1. Az $\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area szinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arsh, vagyis

$$\operatorname{arsh} \stackrel{\triangle}{=} (\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

2. A $\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ függvény inverzét *area koszinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arch, vagyis

$$\operatorname{arch} \stackrel{\triangle}{=} \left(\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}\right)^{-1}.$$

3. A $\operatorname{th}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area tangens hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arth, vagyis

$$\operatorname{arth} \stackrel{\triangle}{=} (\operatorname{th}|_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

5.38. Tétel. *Area hiperbolikus függvények.*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén* $\operatorname{arsh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
2. *Minden $x \in [1,\infty[$ esetén* $\operatorname{arch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
3. *Minden $x \in]-1,1[$ esetén* $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Bizonyítás. Az előző 5.37 tétel bizonyításban már levezettük ezeket a formulákat.

5.39. Tétel. *Az* arsh *az* arch *és az* arth *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján ezek a függvények folytonos függvények kompozíció, ezért folytonosak.

6 Differenciálszámítás I.

6.1. Differenciálhatóság

6.1. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

– Azt mondjuk, hogy az f *függvény differenciálható*, vagy *deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A\in\mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A$$
teljesül. Ezt az A számot az f *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük.

– Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a
$$f' : \left\{a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \mid \exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}\to\mathbb{R}\qquad a\mapsto \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
függvényt.

– Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom} f'$.

– Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A,\mathbb{R})$ jelöli.

Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény deriváltjára használjuk még a $\frac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}\,x}$ jelölést is.

6.2. Definíció. Legyen $I,J\subseteq\mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy a $\varphi:I\to J$ függvény *diffeomorfizmus*, ha bijekció, differenciálható és az inverze is differenciálható.

6.1. Tétel. *(A differenciálhatóság általános jellemzése.) Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy*
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|}=0.$$
Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a)=c$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel,hogy az f függvény differenciálható az a pontban, és legyen $c=f'(a)$. Ekkor a derivált definíciója alapján
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a}=0,$$
vagyis
$$0=\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|}\right|,$$
amiből
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|}=0$$
következik.
Most tegyük fel, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ olyan szám, melyhez létezik $c\in\mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|}=0.$$

Ekkor

$$0 = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{|x-a|} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{x-a} \right|,$$

vagyis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{x-a} = 0,$$

amiből

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c = 0,$$

következik, tehát f differenciálható az a pontban és $f'(a) = c$.

6.2. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x-a| < \delta \ \to \ |f(x) - f(a) - c(x-a)| \leq \varepsilon \cdot |x-a|\big).$$

Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

Bizonyítás. Az előző állításból és a határérték definíciójából következik.

6.3. Tétel. *Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$, $f'(a) = A$, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a differenciálhatóság jellemzése alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x-a| < \delta \ \to \ |f(x) - f(a) - A(x-a)| \leq \varepsilon \cdot |x-a|\big).$$

Vagyis minden $|x-a| < \delta$ számra

$$|f(x) - f(a)| \leq (|A| + \varepsilon)\, |x-a|\,,$$

amiből $\lim\limits_{a} f = f(a)$ adódik. Ez pedig az f függvény folytonosságát jelenti.

6.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

6.4. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int} \operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

- *$f + g$ differenciálható az a pontban, és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
- *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban, és $(cf)'(a) = cf'(a)$;*
- *fg differenciálható az a pontban, és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
- *ha $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ differenciálható az a pontban, és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int} \operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. A számolás folyamán a határértékekre vonatkozó 5.4 tételt fogjuk többször felhasználni.

1.

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

2.
$$\lim_{x\to a}\frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a}=c\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=cf'(a)$$

3. Mivel az f függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ teljesül.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a}=\\&=\lim_{x\to a} f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)g'(a)+g(a)f'(a)\end{aligned}$$

4. Mivel a g függvény folytonos az a pontban, ezért annak létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in B_r(a)$ számra $g(x)\neq 0$. A továbbiakban az a pontnak ezt a környezetét fogjuk csak tekinteni. Továbbá a g függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ teljesül. Ezek alapján

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}=\\&=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}-\frac{f(a)}{g(x)g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

6.5. Tétel. *Legyen $A\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmaz, $f,g\in C^1(A,\mathbb{R})$ és $c\in\mathbb{R}$. Ekkor*

$$f+g,fg,cf\in C^1(A,\mathbb{R})$$

teljesül, vagyis $C^1(A,\mathbb{R})$ algebra.

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a\in A$ pontra alkalmazni.

6.6. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f\circ g$ differenciálható az a pontban, és*
$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ olyan, hogy a g függvény differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$, tehát

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+\exists\delta_1\in\mathbb{R}^+\forall y\in\mathbb{R}:\\&\qquad|y-g(a)|<\delta_1\ \to\ |f(y)-f(g(a))-f'(g(a))(y-g(a))|\le\varepsilon_1|y-g(a)|.\end{aligned}$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontan, ezért $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}g$, tehát

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon_2\in\mathbb{R}^+\exists\delta_2\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}:\\&\qquad|x-a|<\delta_2\ \to\ |g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)|\le\varepsilon_2|x-a|.\end{aligned}$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}: \qquad |x-a| < \delta_3 \;\rightarrow\; |g(x)-g(a)| < \varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x-a| < \delta_3 \;\rightarrow\; |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x)-g(a))| \leq \varepsilon_1 |g(x)-g(a)| .$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x-a| < \delta_2 \;\rightarrow\; |g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)| \leq \varepsilon_1 |x-a| .$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra, ha $|x-a| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x)-g(a))| &\leq \varepsilon_1 |g(x)-g(a)| \\ |g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)| &\leq \varepsilon_1 |x-a| . \end{aligned}$$

Ezek alapján, ha $|x-a| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} &|f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x-a)| = \\ &\quad = |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x)-g(a)) + \\ &\qquad + f'(g(a))(g(x)-g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x-a)| \leq \\ &\quad \leq |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x)-g(a))| + \\ &\qquad + |f'(g(a))| \cdot |(g(x)-g(a)) - g'(a)(x-a)| \leq \\ &\quad \leq \varepsilon_1 |g(x)-g(a)| + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x-a| \leq \\ &\quad \leq \varepsilon_1 (\varepsilon_1 |x-a| + |g'(a)| |x-a|) + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x-a| = \\ &\quad = \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a))|) |x-a| \end{aligned}$$

Vagyis bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a))|) < \varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $|x-a| < \delta'$ esetén

$$|f(g(x)) - f(g(a)) - (f'(g(a)) \cdot g'(a))(g(x)-g(a))| \leq \varepsilon \cdot |x-a| ,$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és tegyük fel, hogy a végtelen torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak, és léteznek az alábbi határértékek.

$$a \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\infty} f' \qquad b \stackrel{\triangle}{=} \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

Ekkor az $x \mapsto ax + b$ függvényt az f *függvény végtelenben vett aszimptotájának* nevezzük. Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben vett aszimptota.

6.3. Hatványsorok deriválása

6.7. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$, és a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-n}$ függvény deriváltja $g'(x) = -nx^{-n-1}$. (Vagyis $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ és $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n})' = -n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n-1}$.)*

Bizonyítás. Az $n = 0, 1$ esetben a deriválás definíciójából rögtön adódik az állítás. Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

6.8. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor a $B_{R_a}(0)$ halmazon*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k z^k\right)'$$

teljesül, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a hatványsort a konvergenciasugáron belül lehet tagonként deriválni.

6.9. Tétel. *(Elemi függvények deriváltja.)* $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.

Bizonyítás. Az előző állítás alkalmazása a megfelelő hatványsorokra.
Például

$$\sin' z = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k+1)z^{2k}}{(2k+1)!} = \cos z.$$

6.4. Középértéktételek

6.10. Tétel. *(Rolle-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon, és melyre $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in\,]a,b[$, hogy*

$$f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. A 5.18 Weierstrass-tétel értelmében az f függvény valamely $\alpha, \beta \in [a,b]$ pontokban felveszi a minimumát és maximumát. Ha $\{\alpha, \beta\} = \{a, b\}$, akkor az f függvény állandó, vagyis minden $\xi \in\,]a,b[$ pontban $f'(\xi) = 0$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az f függvény a minimumát az α pontban veszi fel, melyre $\alpha \in\,]a,b[$ teljesül. Mivel az f függvény differenciálható az α pontban, ezért

$$f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \begin{cases} = \lim\limits_{x\to\alpha+} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0; \\ = \lim\limits_{x\to\alpha-} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0, \end{cases}$$

ahol felhasználtuk, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \geq f(\alpha)$. A fenti egyenlőtlenségekből $f'(\alpha) = 0$ adódik.
Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy $f'(\beta) = 0$, ha azt tesszük fel, hogy az f függvény a maximumát a β pontban veszi fel, melyre $\beta \in\,]a,b[$ teljesül.

6.11. Tétel. *(Cauchy-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Bizonyítás. Elég Rolle-tételt alkalmazni a

$$h : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

függvényre.

6.12. Tétel. *(Lagrange-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Bizonyítás. Cauchy-tételt kell alkalmazni a $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ függvényre.

6.13. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor*

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \right) \cdot |b - a| .$$

Bizonyítás. A Lagrange-féle középérték tétel közvetlen következménye.

6.14. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f állandó az I intervallumon.*
2. *Az f függvény pontosan akkor monoton növő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.*
3. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növő az I intervallumon.*
4. *Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.*
5. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$ olyan, hogy $a < b$. A Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a, b[$, melyre

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

teljesül. Ebből egyszerűen kapjuk az állításokat.
1. Ha $f' = 0$, akkor $f(b) - f(a) = 0$.
2. Ha f monoton növő és $c \in I$, akkor az f függvény differenciálhatósága miatt

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Ha $f' \geq 0$, akkor $f(b) - f(a) \geq 0$, vagyis f monoton növő.
3. Ha $f' > 0$, akkor $f(b) - f(a) > 0$, vagyis f szigorúan monoton növő.
A 4. és 5. pont a fentiekhez hasonlóan igazolható.

6.5. Függvény inverzének deriválása

A következő tétel segítségével az inverzfüggvények deriváltjait határozhatjuk meg.

6.15. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' folytonos és $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$ vagy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^-$. Ekkor $f(I)$ nyílt intervallum, f^{-1} folytonos, differenciálható, és minden $b \in f(I)$ pontra*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

teljesül.

6.6. Elemi függvények inverzének deriválása

6.16. Tétel. *(Elemi függvények inverzének a deriváltja.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ számra* $\log'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. *Minden $x \in \,]-1,1[$ esetén* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. *Minden $x \in \,]-1,1[$ esetén* $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén* $\operatorname{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
5. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén* $\operatorname{arsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. *Minden $x \in \,]1,\infty[$ esetén* $\operatorname{arch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
7. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén* $\operatorname{arth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$. Az 6.15 tételt alkalmazva az $f = \exp$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}$$

teljesül.
2. Legyen $x \in \,]-1,1[$. Az 6.15 tételt alkalmazva az $f = \sin$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

teljesül. Mivel

$$1 = \cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) + x^2,$$

ezért

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Abból, hogy a sin függvény szigorúan monoton növő a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon következik, hogy az arcsin függvény is szigorúan monoton növő, vagyis $\arcsin' > 0$. Ezek alapján

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Az arcsin függvénynél bemutatott gondolatmenet alapján bizonyítható.
4. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az 6.15 tételt alkalmazva az $f = \operatorname{tg}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2 \operatorname{arctg} x$$

teljesül. Mivel

$$\begin{aligned}
1 &= \cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x) \\
\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} &= 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) \\
\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} &= 1 + x^2 \\
\cos^2(\operatorname{arctg} x) &= \frac{1}{1+x^2},
\end{aligned}$$

ezért

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az 6.15 tételt alkalmazva az $f = \operatorname{sh}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch} \operatorname{arsh} x}$$

teljesül. Mivel minden $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch} a = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 a},$$

ezért

$$\operatorname{ch} \operatorname{arsh} x = \sqrt{1+x^2},$$

vagyis

$$\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6–7. A 6.15 tétel és a 5.38 tételben szereplő formulák segítségével könnyen igazolható.

6.17. Tétel. *A táblázatban szereplő f függvényeknek értelmezhető az f^{-1} inverze a* $\operatorname{Ran} f$ *halmazon, és az f^{-1} függvény értékkészletére és deriváltjára a táblázatban szereplők teljesülnek, minden $x \in$*

$\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{-1}$ *elemre.*

f	$\operatorname{Dom} f$	$\operatorname{Ran} f$	f'	f^{-1}	$\operatorname{Dom} f^{-1}$	$\operatorname{Ran} f^{-1}$	$(f^{-1})'(x)$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	exp	log	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$
sin	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	cos	arcsin	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
cos	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin$	arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
tg	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2}$	arctg	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{1}{1+x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch	arsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
ch	$\mathbb{R}$	$[1,\infty[$	sh	arch	$[1,\infty[$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
th	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$	arth	$]-1,1[$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x^2}$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján nyilvánvaló.

6.18. Tétel. *(A hatványozás deriválása.)*
- *Ha* $a\in[1,\infty[$, *akkor az* $\mathrm{id}^a_{\mathbb{R}}$ *függvény deriváltja* $a\,\mathrm{id}^{a-1}_{\mathbb{R}}$.
- *Ha* $a\in]-\infty,1[$, *akkor az* $\mathrm{id}^a_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ *függvény deriváltja* $a\,\mathrm{id}^{a-1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.

Bizonyítás. Legyen $a\in[1,\infty[$ és $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ az $f(x)=x^a$ függvény. Ekkor

$$f'(x)=(\exp(a\log(x)))'=\exp(a\log(x))a\frac{1}{x}=ax^{a-1}$$

teljesül a hatványozás definíciója, a láncszabály és az exponenenciális valamint a logaritmus függvény deriválási szabálya alapján.

6.7. L'Hospital szabály

6.19. Tétel. *(L'Hospital szabály.) Legyen* $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$, $a<b$ *és* $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ *olyan differenciálható függvény, hogy* $0\notin g'(]a,b[)$.

1. *Ha* $\lim_{b-} f=\lim_{b-} g\in\{-\infty,0,\infty\}$ *és létezik a* $\lim_{b-}\frac{f'}{g'}$ *határérték, akkor létezik a* $\lim_{b-}\frac{f}{g}$ *határérték is, és*
$$\lim_{b-}\frac{f}{g}=\lim_{b-}\frac{f'}{g'}.$$
2. *Ha* $\lim_{a+} f=\lim_{a+} g\in\{-\infty,0,\infty\}$ *és létezik a* $\lim_{a+}\frac{f'}{g'}$ *határérték, akkor létezik a* $\lim_{a+}\frac{f}{g}$ *határérték is, és*
$$\lim_{a+}\frac{f}{g}=\lim_{a+}\frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g'(]a, b[)$, valamint $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g \in \{0, \infty\}$. Ennek a bizonyításnak a mintájára igazolható a többi eset is.
1. Tegyük fel, hogy $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g = 0$ és

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami igazolja a $\lim_{a+} \dfrac{f}{g} = A$ határértéket. Terjesszük ki az f és g függvényt az a pontra is a 0 értékkel, és jelölje $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ ezeket a függvényeket. Legyen $c \in]a, b[$ tetszőleges pont. Ekkor az $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, c]$ intervallumon az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]a, c[$, melyre

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tehát ha $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\xi \in]a, a + \delta[$ esetén

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon,$$

akkor az $x \in]a, a + \delta[$ számokra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül.
2. Most tegyük fel, hogy $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g = \infty$ és

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami igazolja a $\lim_{a+} \dfrac{f}{g} = A$ határértéket.
Mivel $\lim_{a+} \dfrac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_1[$ esetén $\left| \dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < 1$, vagyis minden $x \in]a, a + \delta_1[$ számra

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| < 1 + |A|$$

teljesül, tehát az $\dfrac{f'}{g'}$ függvény korlátos a $]a, a + \delta_1[$ halmazon.
Mivel $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g = \infty$, ezért létezik olyan $c \in]a, a + \delta_1[$, hogy minden $x \in]a, c]$ esetén $f(x), g(x) >$

0. Mégegyszer alkalmazva ezt az elvet, azt kapjuk, hogy létezik olyan $d \in]a, c[$, hogy minden $x \in]a, d]$ esetén $f(x) > f(c)$ és $g(x) > g(c)$. Vezessük be a

$$T :]a, d[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}}$$

függvényt. Legyen $z \in]a, d[$ tetszőleges pont. Ekkor az f és g függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt a $[z, c]$ intervallumon, az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]z, c[$, melyre

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

vagyis az

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{T(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

egyenlőség alapján

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} T(z) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(T(z) - 1\right),$$

tehát

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - A \right| \le \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(T(z) - 1\right) \right|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_2[$ esetén

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $\lim_{x \to a+0} T(x) = 1$ és az $\frac{f'}{g'}$ korlátos a $]a, d[$ halmazon, ezért létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_3[$ esetén

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \left(T(x) - 1\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül minden $z \in]a, d[$ számra. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ olyan szám, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

6.8. Többszörös deriváltak

6.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)} \triangleq f$, és minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)} \triangleq (f^{(i-1)})'$.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. Az f *függvény n-szer differenciálható az a pontban*, ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$.
- Az f *függvény végtelenszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül.
- Az f *függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$.
- Az f *függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$ teljesül. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R})$ jelöli.

– Az f *függvény* n*-szer* $(n \in \mathbb{N}^+)$ *folytonosan differenciálható*, ha f n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű n-szer $(n \in \mathbb{N}^+)$ folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Megjegyzés. A fenti definícióban minden függvényre értelmeztük az $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, azonban könnyen lehet, hogy valamely $i \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(i)} = \emptyset$, és ekkor természetesen minden $\mathbb{N} \ni j > i$ esetén is $\operatorname{Dom} f^{(j)} = \emptyset$.

$\Diamond$

6.20. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton növő.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő.*

Bizonyítás. 1. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex differenciálható függvény és legyen $a, b \in I$, $a < b$. Megmutatjuk, hogy ekkor $f'(a) \le f'(b)$. Minden $x \in]a, b[$ esetén

$$x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a,$$

valamint $\frac{x-a}{b-a}, \frac{b-x}{b-a} \in [0,1]$ és $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$. Tehát az f függvény konvexitása alapján

$$f(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a\right) \le \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

Rövid számolással ebből az egyenlőtlenségből

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

adódik, amiből

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \\ &\le \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b) \end{aligned}$$

következik.
Megfordítva, legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' monoton növő és legyen $a, b \in I$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $t \in [0,1]$ számra

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b)$$

teljesül, vagy másképp, hogy a

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(ta + (1-t)b) - tf(a) - (1-t)f(b)$$

függvényre $g \le 0$ teljesül. A g függvény a folytonossága és a $[0,1]$ kompaktsága miatt felveszi a maximumát valamely $t_0 \in [0,1]$ pontban. Tegyük fel, hogy $g(t_0) = c > 0$. Ekkor a Rolle-tétel bizonyítása alapján $g'(t_0) = 0$. Mivel f' monoton növő és

$$g'(t) = f'(t(a-b)+b)(a-b) - f(a) + f(b),$$

ezért g' is monoton növő. Tehát minden $z \in \,]t_0, 1[$ esetén $g'(z) \geq 0$. A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva a $[t_0, 1]$ intervallumra, azt kapjuk, hogy létezik olyan $z \in \,]t_0, 1[$, melyre

$$g(1) - g(t_0) = g'(z)(1 - t_0),$$

azonban $g(1) - g(t_0) = 0 - c < 0$ és $g'(z)(1 - t_0) \geq 0$. Mivel ellentmondást kaptunk így a $g(t_0) = c > 0$ feltételezés nem helytálló, vagyis a g függvény maximuma nem lehet szigorúan pozitív.
2. A konkáv eset a -1 számmal való szorzással visszavezethető a konvex esetre.

6.21. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha $f'' \leq 0$.*

Bizonyítás. A 6.20 előző állítás és a 6.14 tétel alapján nyilvánvaló.

6.22. Tétel. *(Súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha_i \in [0, 1]$ olyan, melyre $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ teljesül. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}.$$

Bizonyítás. Az exponenciális függvény konvexitásából és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \log x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp(\log x_k)$$

6.23. Tétel. *(Hölder-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, valamint $\alpha, \beta \in \,]0, 1[$ olyan, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^{\beta}.$$

Bizonyítás. Legyen $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ és $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Ha $0 < x, y$, akkor a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ számra

$$\left(\frac{x_i}{x}\right)^{\alpha} \left(\frac{y_i}{y}\right)^{\beta} \leq \alpha \left(\frac{x_i}{x}\right) + \beta \left(\frac{y_i}{y}\right)$$

teljesül, melyet összegezve az i indexre

$$\frac{1}{x^{\alpha} y^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \alpha \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha + \beta = 1$$

adódik. Ennek átrendezése a bizonyítandó egyenlőtlenség.

6.24. Tétel. *(Minkowski-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. Ekkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. A Hölder-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1} y_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^{n}\left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\end{aligned}$$

adódik, aminek az átrendezése a bizonyítandó tétel.

6.9. Taylor-sorfejtés

6.25. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$, és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor minden $p \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(b-\xi)^{n+1-p}(b-a)^p.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter esetén definiáljuk a

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \lambda(b-x)^p.$$

függvényt. Ekkor a

$$\begin{aligned}g(a) &= f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \lambda(b-a)^p \\ g(b) &= 0\end{aligned}$$

egyenlőségből látszik, hogy a

$$\lambda = \frac{1}{(b-a)^p}\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right)$$

választás esetén $g(a) = g(b) = 0$ teljesül. Mivel a g függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon és differenciálható az intervallum belsejében, valamint $g(a) = g(b) = 0$, ezért a Rolle-tétel értelmében létezik olyan $\xi \in]a,b[$ pont, melyre $g'(\xi) = 0$ teljesül.
Most meghatározzuk a g' függvényt.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k\right)' + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1}\right) + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + p\lambda(b-x)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Vagyis a $g'(\xi) = 0$ egyenletből

$$-\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(b-x)^n + \lambda p(b-\xi)^{p-1} = 0$$

adódik, amibe beírva λ értékét és átrendezve a bizonyítani kívánt egyenlőséghez jutunk.

Külön definiáljuk a fenti tétel két speciális esetét.

6.5. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a,b] \subseteq \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a,b[$ intervallumon.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a,b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a,b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$ kifejezést *Cauchy-féle maradéktagnak* nevezzük.

6.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T_{n,a}^{f}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és $a \in \operatorname{Dom} f$, akkor az *$f$ függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T_a^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hatványsort.

6.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f'$. Az *$f$ függvény a pontbeli érintőjének* nevezzük a $T_{1,a}^f$ polinomot, vagyis az érintő egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

6.8. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f^{(n)} \cap \operatorname{Dom} g^{(n)})$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ és g függvények az a pontban n-ed rendben érintkeznek*, ha minden $n \geq k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ teljesül.

6.26. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$, és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Ekkor $P_n = T_{n,a}^f$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$, és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Az $n = 0$ esetben nyilvánvaló az állítás, ezért tegyük fel, hogy $n \geq 1$. Legyen

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

olyan polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $j \in \{0, \ldots, n\}$ esetén

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} b_k \frac{k!}{(k-j)!}(x-a)^{k-j}$$

teljesül. Az n-ed rendben való érintkezés miatt minden $j \in \{0, \ldots, n\}$ számra

$$f^{(j)}(a) = P_n^{(j)}(a) \quad \to \quad f^{(j)}(a) = j! \cdot b_j$$

teljesül, vagyis $b_j = \dfrac{f^{(j)}(a)}{j!}$, ezért

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = T_{n,a}^f(x).$$

6.27. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n,a}^f(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

6.10. Lokális szélsőérték jellemzése

6.9. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\mathbb{R}$.

- Az f *függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in B_r(a)\cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a)\geq f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in B_r(a)\cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a)\leq f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
- Az f *függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $a\neq x\in B_r(a)\cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a)>f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $a\neq x\in B_r(a)\cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a)<f(x)$. *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

6.28. Tétel. *Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $1<n\in\mathbb{N}$, $a\in\operatorname{Dom} f^{(n)}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i\in\mathbb{N}$, $1\leq i<n$ esetén $f^{(i)}(a)=0$, valamint $f^{(n)}(a)\neq 0$.*

1. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az a pontban, ha n páros, és $f^{(n)}(a)<0$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az a pontban, ha n páros, és $f^{(n)}(a)>0$.*
3. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $1<n\in\mathbb{N}$, $a\in\operatorname{Dom} f^{(n)}$ és tegyük fel, hogy minden $i\in\mathbb{N}$, $1\leq i<n$ esetén $f^{(i)}(a)=0$ teljesül, valamint $f^{(n)}(a)\neq 0$. Az 1. pontot igazoljuk, a második pont a -1 számmal való szorzással visszavezethető az elsőre.
Mivel $a\in\operatorname{Dom} f^{(n)}$ ezért létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$, hogy $]a-r,a+r[\,\subseteq \operatorname{Dom} f$. Az infinitezimális Taylor-formula alapján (6.27 tétel) a

$$\varphi:]a-r,a+r[\,\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-T^f_{n,a}(x)}{|x-a|^n}, & \text{ha} \quad x\neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x=a \end{cases}$$

függvény folytonos, továbbá a deriváltakra vonatkozó feltételek miatt

$$T^f_{n,a}(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

vagyis az $x\neq a$ esetben

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|^n}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{(x-a)^n}{|x-a|^n},$$

amiből

$$f(x)-f(a)=|x-a|^n\cdot\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{(x-a)^n}{|x-a|^n}+\varphi(x)\right) \tag{6.1}$$

következik.
1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban. Ekkor létezik olyan δ_1, hogy minden $x\in\,]a-\delta_1,a+\delta_1[\,\setminus\{a\}$ esetén $f(x)<f(a)$. Legyen $\delta=\min\{r,\delta_1\}$. Ha n páros, akkor (6.1) képlet alapján

$$f(x)-f(a)=|x-a|^n\cdot\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\varphi(x)\right),$$

vagyis minden $x \in]a-\delta, a+\delta[$ számra

$$0 > \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \quad \to \quad -n!\varphi(x) > f^{(n)}(a),$$

amiből a $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ határérték miatt $0 \geq f^{(n)}(a)$ adódik, azonban feltettük, hogy $f^{(n)}(a) \neq 0$, ezért $0 > f^{(n)}(a)$.
Ha n páratlan, akkor a $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[$ esetén

$$\varphi(x) < \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right|.$$

Legyen $\delta = \min\{r, \delta_1\}$.
Ha $0 < f^{(n)}(a)$ és $x \in]a, a+\delta[$, akkor $a < x$, $\dfrac{(x-a)^n}{|x-a|^n} = 1$, tehát a (6.1) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x)\right) > 0,$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.
Ha $0 > f^{(n)}(a)$ és $x \in]a-\delta, a[$, akkor $x < a$, $\dfrac{(x-a)^n}{|x-a|^n} = -1$, tehát a (6.1) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(-\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x)\right) > 0,$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.
2. Tegyük fel, hogy n páros és $f^{(n)}(a) < 0$. A (6.1) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x)\right).$$

A $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $]a-\delta_1, a+\delta_1[$ esetén

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) < 0.$$

Ekkor a $\delta = \min\{r, \delta_1\}$ számra teljesül az, hogy minden $x \in]x-\delta, x+\delta[\setminus \{a\}$ elemre

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x)\right) < 0,$$

vagyis $f(x) < f(a)$.

6.29. Tétel. *Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy*

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \left(\left|f^{(n)}(x)\right| \leq K\right)$$

teljesül, ekkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \forall x \in B_r(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$, továbbá legyen $K \in \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \left(\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K \right)$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ rögzített szám. A Taylor-formula alapján, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $y \in B_r(a)$, hogy

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} r^{n+1}.$$

Mivel az $n \mapsto \dfrac{K}{(n+1)!} r^{n+1}$ sorozat a nullához tart, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = 0$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

6.30. Tétel. *Legyen $c \in \mathbb{R}$ és $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre létezik $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in B_r(0)$ esetén*

$$P_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = P_b(x)$$

teljesül. Ekkor $a = b$.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$. A hatványsorok n-edik deriváltja

$$P_a^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = P_b^{(n)}(x).$$

Amiből az $x = 0$ helyettesítés után $a_n = b_n$ adódik. Mivel ez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, ezért $a = b$.

6.31. Tétel. *Ha $x \in]-1, 1[$, akkor*

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

Bizonyítás. Az $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$ hatványsor konvergenciasugara $R = 1$, ezért minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

függvény. Valamint $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$ miatt minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$f(x) = \log(1+x)$$

függvény. A hatványsor illetve a logaritmus függvény deriválási szabály alapján

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x)}$$

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k .$$

Mivel $|x| < 1$, ezért a geometriai sor összegképlete alapján $(f-g)' = 0$ a $]-1,1[$ intervallumon. Vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $x \in]-1,1[$ esetén $f(x) = C + g(x)$. Mivel $f(0) = g(0) = 0$, ezért $C = 0$. Vagyis minden $x \in]-1,1[$ számra $f(x) = g(x)$.

6.11. Binomiális sorfejtés

6.10. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\binom{z}{n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{k+1} & \text{ha} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

6.32. Tétel. *(Binomiális-sorfejtés.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in]-1,1[$ esetén*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x) = (1+x)^\alpha$, és $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. A

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\alpha - k + 1}{k-1} \right| = 1,$$

határérték alapján a hatványsor konvergenciasugara 1, vagyis minden $x \in]-1,1[$ esetén a $P(x)$ hatványsor konvergens.

Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$. Ez az

$$\begin{aligned} P'(x)f(x) - f'(x)P(x) &= (1+x)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} - \alpha(1+x)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \\ &= (1+x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{k} x^k \right) = \\ &= (1+x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k\binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} \right) x^k - \alpha \right) = \\ &= (1+x)^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} \right) x^k = 0 \end{aligned}$$

egyenlőségből következik, ahol felhasználtuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k} = 0.$$

Mivel $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$, ezért létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, melyre $f = cP$ teljesül a $]-1,1[$ halmazon. Továbbá az $f(0) = P(0)$ miatt $c = 1$, vagyis $f = P$.

7 Határozatlan integrál

7.1. Primitív függvény és tulajdonságai

7.1. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. A differenciálható $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f *primitív függvényének* nevezzük, ha $F' = f$ teljesül. Az f *függvény határozatlan integráljának* nevezzük az

$$\{F : I \to \mathbb{R} |\ F' = f\}$$

halmazt, melyre az $\int f$ vagy $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

7.1. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f bármelyik primitív függvénye. Ekkor*

$$\int f = \{F + C |\ C \in \mathbb{R}\}\,.$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye.
Ha $G \in (F + C |\ C \in \mathbb{R})$, akkor létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, melyre $G = F + C$. Ekkor $G' = F' = f$, vagyis a G függvény is az f primitívfüggvénye.
Ha $G : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye, akkor $G' = f$, tehát $(G - F)' = 0$. Ebből a 6.14 tétel alapján következik, hogy létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, szám, hogy $G - F = C$, vagyis $G \in (F + C |\ C \in \mathbb{R})$.

Megjegyzés. A fenti tétel nem igaz, ha I nem összefüggő halmaz!

$\lozenge$

A fenti tétel miatt, ha F az f függvény egy primitív függvénye, akkor az

$$\int f = F + C$$

rövidebb, de pontatlanabb jelölést is használjuk.

7.2. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy mindkettőnek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ számra*

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \textit{és} \quad \int (cf) = c \int f.$$

Bizonyítás. Az $F, G : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre vonatkozó

$$(F + G)' = F' + G' \qquad (cF)' = cF'$$

deriválási szabályból következik.

7.3. Tétel. *(Elemi határozatlan integrálok.) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ekkor az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \exp = \exp + C \qquad \int \sin = -\cos + C \qquad \int \cos = \sin + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \log|x| + C \qquad \int \mathrm{sh} = \mathrm{ch} + C \qquad \int \mathrm{ch} = \mathrm{sh} + C$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{1+a}}{1+a} + C$$

7.2. Integrálási módszerek

7.4. Tétel. *(Parciális integrálás.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye.
Legyen $F \in fg - \int (fg')$. Ekkor

$$fg - F \in \int (fg') \quad \to \quad (fg - F)' = fg' \quad \to \quad f'g + fg' - F' = fg' \quad \to \quad F' = f'g,$$

vagyis $F \in \int (f'g)$, ezért az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye, valamint

$$fg - \int (fg') \subseteq \int (f'g)$$

teljesül.
Most megmutatjuk, hogy $\int (f'g) \subseteq fg - \int (fg')$. Ehhez legyen $F \in \int (f'g)$. Ekkor a bizonyítandó $F \in fg - \int (fg')$ kifejezés ekvivalens alakja az alábbi.

$$fg - F \in \int (fg')$$

Ez viszont egyszerűen adódik az

$$(fg - F)' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

deriválásból.

7.5. Tétel. *(Helyettesítéses integrálás.) Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye, és legyen $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmus. Ekkor az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f\right) \circ \varphi.$$

Bizonyítás. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye, és legyen $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmus.
Megmutatjuk, hogy az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye. Legyen $F \in \int f$ és legyen $G = F \circ \varphi$. A közvetett függvény deriválási szabálya alapján

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

vagyis $G \in \int (f \circ \varphi)\varphi'$. A fenti gondolatmenetből

$$\left(\int f\right) \circ \varphi \subseteq \int (f \circ \varphi)\varphi'$$

is következik.
Most igazoljuk, hogy

$$\int (f\circ\varphi)\varphi' \subseteq \left(\int f\right)\circ\varphi$$

teljesül. Legyen $F \in \displaystyle\int (f\circ\varphi)\varphi'$, ami azt jelenti, hogy $F' = (f\circ\varphi)\varphi'$. Azt kell igazolni, hogy $F\circ\varphi^{-1} \in \int f$, ami ekvivalens azzal, hogy $(F\circ\varphi^{-1})' = f$. A függvénykompozíció deriválására vonatkozó láncszabály, és az inverzfüggvény deriválására vonatkozó

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi'\circ\varphi^{-1}}.$$

szabály felhasználásával a bizonyítandó

$$\begin{aligned}(F\circ\varphi^{-1})' &= \left(F'\circ\varphi^{-1}\right)\cdot\left(\varphi^{-1}\right)' = \\ &= \left(((f\circ\varphi)\cdot\varphi')\circ\varphi^{-1}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'\circ\varphi^{-1}} = \\ &= \left(f\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\right)\cdot\left(\varphi'\circ\varphi^{-1}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'\circ\varphi^{-1}} = f\end{aligned}$$

egyenlőség adódik.

Megjegyzés. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye, és legyen $\varphi : J \to I$ differenciálható homeomorfizmus. Ekkor a fenti képlet az

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}\,t = \int f(x)\ \mathrm{d}\,x$$

az alakban írható fel az $x = \varphi(t)$ helyettesítéssel.

$\diamondsuit$

7.6. Tétel. *(Az elemi függvények inverzének az integrálja.) Az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \arcsin(x)\ \mathrm{d}\,x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \qquad x \in]-1,1[$$

$$\int \arccos(x)\ \mathrm{d}\,x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \qquad x \in]-1,1[$$

$$\int \mathrm{arctg}(x)\ \mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \mathrm{arsh}(x)\ \mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{arsh}\,x - \sqrt{1+x^2} + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \mathrm{arch}(x)\ \mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{arch}\,x - \sqrt{x^2-1} + C \qquad x \in]1,\infty[$$

$$\int \mathrm{arth}(x)\ \mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{arth}\,x + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + C \qquad x \in]-1,1[$$

$$\int \log(x)\ \mathrm{d}\,x = x\log(x) - x + C \qquad x \in]0,\infty[$$

Bizonyítás. Mindegyik formula a parciális integrálás következménye.
Az első integrált megmutatjuk részletesen. Legyen

$$f :]-1,1[\qquad x \mapsto x$$

$$g :]-1,1[\qquad x \mapsto \arcsin x$$
$$\varphi :]-1,1[\qquad x \mapsto \sqrt{1-x^2}.$$

Ekkor f, g és φ differenciálható függvény, valamint

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

formula felhasználásával azt kapjuk, hogy az fg' függvénynek létezik primitív függvénye, hiszen

$$(-\varphi)' = fg' \quad \to \quad -\varphi \in \int (fg')\,.$$

A 7.4 parciális integrálás tétele alapján az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül, ami ebben az esetben az alábbi egyenlőséget jelenti.

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= x\arcsin x - (-\varphi(x)) + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

A parciális integrálás segítségével számolható az alábbi típusú integrál.

$$\int \left\{ \begin{matrix} \text{polinom} \\ \exp, \log \\ \sin, \cos \\ \mathrm{sh}, \mathrm{ch} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \text{polinom} \\ \exp, \log \\ \sin, \cos \\ \mathrm{sh}, \mathrm{ch} \end{matrix} \right\}$$

7.7. Tétel. *Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbb{R}$ bármely nyílt intervallumán az*

$$\int \sin^n \cos^m$$

integrált az alábbi módszerek rekurzív alkalmazásával lehet kiszámolni.

1. Ha $m = 0$, akkor

$$\int \sin^n x \;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}} \displaystyle\int (1-\cos t)^k \;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \text{ha} \quad n = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ -\displaystyle\int (1-t^2)^k \;\mathrm{d}\,t, & t = \cos x \quad \text{ha} \quad n = 2k+1 \ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

2. Ha $n = 0$, akkor

$$\int \cos^m x \;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}} \displaystyle\int (1+\cos t)^k \;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \text{ha} \quad m = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ \displaystyle\int (1-t^2)^k \;\mathrm{d}\,t, & t = \sin x \quad \text{ha} \quad m = 2k+1 \ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

3. Ha n páratlan, akkor a $t = \cos x$, ha m páratlan, akkor a $t = \sin x$ helyettesítés egyszerűsíti az integrált.

4. Ha n és m páros, valamint $n = 2k$, $m = 2l$ $(k, l \in \mathbb{N})$, akkor

$$\int \sin^n x \cos^m x \; \mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+l+1}} \displaystyle\int (\sin^{2k} t)(1+\cos t)^{l-k} \; \mathrm{d}\,t, \quad t = 2x \quad \text{ha} \quad n \le m, \\ \dfrac{1}{2^{k+l+1}} \displaystyle\int (\sin^{2l} t)(1-\cos t)^{k-l} \; \mathrm{d}\,t, \quad t = 2x \quad \text{ha} \quad n > m. \end{cases}$$

Bizonyítás. A helyettesítéses integrálás alapján egyszerűen igazolható.

7.8. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$.*

1. Ekkor az $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{b}{a} \right\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} \; \mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \log|ax+b| + C, & \text{ha } n = 1; \\ \dfrac{1}{a(1-n)} \cdot \dfrac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C, & \text{ha } n > 1. \end{cases}$$

teljesül.

2. Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \; \mathrm{d}\,x = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) + C,$$

és ha $b^2 - 4ac > 0$ akkor az $\{x \in \mathbb{R} |\; ax^2+bx+c \neq 0\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \; \mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C$$

teljesül.

3. Ha $n > 1$ és $b^2 - 4ac \neq 0$, akkor az $\{x \in \mathbb{R} |\; ax^2+bx+c \neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \; \mathrm{d}\,x = \frac{2ax+b}{(1-n)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\ + \frac{2(2n-3)a}{(1-n)(b^2-4ac)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \; \mathrm{d}\,x.$$

4. Az $\{x \in \mathbb{R} |\; ax^2+bx+c \neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} \; \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a} \log\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} \; \mathrm{d}\,x.$$

5. Ha $n > 1$ és $b^2 - 4ac \neq 0$, akkor az $\{x \in \mathbb{R} |\; ax^2+bx+c \neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} \; \mathrm{d}\,x = \frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\ + \frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \; \mathrm{d}\,x.$$

Bizonyítás. Deriválással egyszerűen adódik.

7.3. Parciális törtekre bontás

A következő tétel szerint bármely két polinomnak a hányadosa integrálható az előző tételben szereplő formulák segítségével. Azt a módszert, ahogy visszavezetjük a polinomok hányadosát a fenti tételben szereplő integrandusokra *parciális törtekre bontásnak* nevezik. Mivel a tétel bizonyítása bizonyos lineáris egyenletrendszerek egyértelmű megoldhatóságának a vizsgálatáról szól, és számos tételt felhasznál a lineáris algebra témaköréből, ezért nem ismertetjük.

7.9. Tétel. *(Parciális törtekre bontás.) Legyen $P_n(x)$ egy tetszőleges n-ed fokú-, $Q_m(x)$ pedig egy olyan m-ed fokú polinom, melynek a főegyütthatója* 1.

1. *Ha $n \geq m$, akkor létezik egyetlen olyan $\bar{P}(x)$ $(n-m)$-ed fokú- és m-nél kisebb fokú $\tilde{P}(x)$ polinom, hogy*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \bar{P}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}$$

teljesül.

2. *A Q_m polinomhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,k}$, $(p_i, q_i)_{i=1,\ldots,l}$ páronként különböző valós számok és számpárok, valamint $(z_i)_{i=1,\ldots,k}$, $(v_i)_{i=1,\ldots,l}$ természetes számok, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$Q_m(x) = \left(\prod_{i=1}^{k}(x+\lambda_i)^{z_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{l}(x^2+p_ix+q_i)^{v_i}\right)$$

teljesül, továbbá egyetlen $1 \leq i \leq l$ esetén sem létezik valós gyöke az $x^2+p_ix+q_i$ polinomnak. Ha $n < m$, akkor egyértelműen léteznek olyan $(\mu_{ij})_{i=1,\ldots,k;j=1,\ldots,z_i}$, $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})_{i=1,\ldots,l;j=1,\ldots,v_i}$ valós számok, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{z_i}\frac{\mu_{ij}}{(x+\lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{v_i}\frac{\alpha_{ij}x+\beta_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

teljesül minden $x \in \operatorname{Dom}\dfrac{P_n}{Q_m}$ elemre.

8 Határozott integrál

8.1. A Riemann-integrál

8.1. Definíció. Az $[a,b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ szám n-est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$, és minden $0 \le i \le n-1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a,b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a,b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n,[a,b]) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ x_0 = a,\ x_{n-1} = b,\ \forall i \in (n-1):\ x_i < x_{i+1} \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, ha $\operatorname{Ran} y \subseteq \operatorname{Ran} x$, melyet az $y \le x$ szimbólummal jelölünk.

Vagyis az $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás pontosan akkor finomabb, mint az $y = (y_0, \dots, y_m) \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, ha

$$\{y_0, \dots, y_m\} \subseteq \{x_0, \dots, x_n\}$$

teljesül, és ezt az $y \le x$ vagy másképp a $(y_i)_{i=0,\dots,m} \le (x_i)_{i=0,\dots,n}$ szimbólummal jelöljük.

8.2. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a,b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i |\ 0 \le i \le n\} \cup \{y_i |\ 0 \le i \le m\}, \qquad k = |L| - 1,$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0,\dots,k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

– Legyen $z_0 = a$.
– Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min\left(L \setminus \{z_0, \dots, z_i\}\right).$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0,\dots,k}$ felosztást az x *és az* y *felosztás egyesítésének* nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

8.3. Definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ egy felosztás. Ekkor az f *függvény* $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ *felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege*

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát.*

$$s(f) = \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} |\ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$
$$S(f) = \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} |\ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$

8.1. Tétel. *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény.*

1. *Minden $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_x(f) \leq S_x(f)$.*
2. *Ha z jelöli az $[a, b]$ intervallum triviális folsztását, azaz $z = (a, b)$, akkor minden más $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_z(f) \leq s_x(f)$ és $S_x(f) \leq S_z(f)$.*
3. *Ha az $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $x \leq y$ teljesül, akkor $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_y(f) \leq S_x(f)$.*
4. *Bármely $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $s_x(f) \leq S_y(f)$ teljesül.*
5. *Az $s(f)$ halmaz felülről korlátos, valamint az $S(f)$ halmaz alulról korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, jelölje z a $z_0 = a$ és $z_1 = b$ triviális felosztást továbbá legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a, b]$ intervallum olyan felosztása, melyre $x \leq y$ teljesül.
1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Az $s_z(f) \leq s_x(f)$ egyenlőtlenséget

$$s_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) =$$
$$= \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t) \right) (b - a) = s_z(f)$$

igazolja, ehhez hasonlóan mutatható meg, hogy $S_x(f) \leq S_z(f)$ teljesül.
3. Tegyük fel, hogy az x felosztást oly módon finomítjuk, hogy valamely $j \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén az $[x_j, x_{j+1}]$ szakasz belsejéből hozzáveszünk még egy c osztópontot. Jelölje x' az így kapott felosztást. Mivel

$$\left(\inf_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\inf_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \geq$$
$$\geq \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j)$$
$$\left(\sup_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\sup_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \leq$$
$$\leq \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j),$$

ezért $s_x(f) \leq s_{x'}(f)$ és $S_x(f) \geq S_{x'}(f)$.
Mivel az y felosztást megkaphatjuk az x felosztásból véges sok új osztópont hozzávételével, ezért $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_x(f) \geq S_y(f)$ teljesül.
4. Legyen x, y tetszőleges felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, és tekintsük a $z = x \sqcup y$ felosztást. Ekkor $x \leq z$ és $y \leq z$, amiből az előző pont alapján $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$ adódik. Mivel az 1. pont alapján $s_z(f) \leq S_z(f)$, ezért $s_x(f) \leq S_y(f)$.
5. Mivel minden x felosztásra $z \leq x$ teljesül, ezért

$$s_z(f) \leq s_x(f) \leq S_x(f) \leq S_z(f),$$

ami igazolja, hogy az $s(f)$ halmaz felülről, az $S(f)$ halmaz pedig alulról korlátos.

8.4. Definíció. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

– *alsó integráljának* nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\underline{\int_a^b} f$;

– *felső integráljának* nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\overline{\int_a^b} f$;

– *Riemann-integrálható*, ha $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, ekkor $\int\limits_a^b f$ vagy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ jelöli az $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ értéket. Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R}) \triangleq \{f : [a,b] \to \mathbb{R} |\ f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}\,.$$

– Ha $f \in \mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R})$, akkor bevezetjük a

$$\int\limits_b^a f \triangleq -\int\limits_a^b f$$

jelölést.

– Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra, és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén legyen

$$\int\limits_a^a f \triangleq 0.$$

– Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az f *függvény határozott integráljának* nevezzük.

8.2. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Azt kell megmutatni, hogy $\alpha \leq \beta$. Az állítással ellentétben tegyül fel, hogy $\beta < \alpha$. Ekkor legyen $\varepsilon = \alpha - \beta$. Legyen x és y az a felosztás, melyre $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f)$ és $S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel a 8.1 tétel szerint minden x, y felosztás esetén $s_x(f) \leq S_y(f)$, ezért

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\alpha - \beta < \varepsilon$, ami lehetetlen, hiszen $\alpha - \beta = \varepsilon$.

8.2. A Riemann-integrálhatóság kritériumai

Ebben a fejezetben először csak elégséges feltételeket adunk függvények Riemann-integrálhatóságára. A fejezet végén közelebbről is megvizsgáljuk a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó Lebesgue-tételt, mely szükséges és elégséges feltételt ad korlátos függvény Riemann-integrálhatóságára.

8.3. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} :\ S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $c = \int_a^b f$, valamint $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan x, y felosztása az $[a, b]$ halmaznak, melyre

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \qquad S_y < c + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $z = x \sqcup y$. Mivel $x \leq z$ és $y \leq z$, ezért $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$, vagyis

$$\begin{aligned} c - \frac{\varepsilon}{2} &< s_x(f) \leq s_z(f) \leq c \\ c &\leq S_z(f) \leq S_y \leq c + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ezért

$$c - c \leq S_z(f) - s_z(f) < c + \frac{\varepsilon}{2} - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk az állítás egyik irányú következtetését.
Most tegyük fel, hogy f olyan függvény, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Megmutatjuk, hogy $\alpha = \beta$. A 8.2 tétel alapján $\alpha \leq \beta$.
Tegyül fel, hogy $\alpha < \beta$. Ekkor legyen $\varepsilon = \beta - \alpha$. A feltételezésünk alapján ehhez a ε paraméterhez létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$\beta \leq S_x(f) < s_x(f) + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon,$$

vagyis a $\varepsilon = \beta - \alpha < \varepsilon$ ellentmondást kapjuk.
Mivel $\alpha \leq \beta$ és $\alpha < \beta$ lehetetlen, ezért $\alpha = \beta$, ami azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

8.5. Definíció. A korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*

$$\omega(f, [a, b]) \triangleq \left(\sup_{t \in [a,b]} f(t)\right) - \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t)\right).$$

Az f *függvény* $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ *felosztáshoz tartozó oszcillációs összege*

$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i).$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény és $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén

$$\Omega_x(f) = S_x(f) - s_x(f)$$

teljesül.

8.4. Tétel. *Minden* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \ \Omega_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A 8.3 tétel alapján nyilvánvaló.

8.5. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor*

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{u,v\in[a,b]} |f(u) - f(v)|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $H = f([a, b])$ és $A = \{|x - y| \mid x, y \in H\}$. Mivel f korlátos, ezért a H halmaz is korlátos, vagyis létezik az $\alpha = \sup H$ és a $\beta = \inf H$ valós szám. Megmutatjuk az

$$\alpha - \beta = \sup A$$

egyenlőséget, melyből már következik a bizonyítandó állítás.
Bármely $x, y \in H$ számra $\beta \leq x, y \leq \alpha$ teljesül, ezért

$$\beta - \alpha \leq x - y \leq \alpha - \beta,$$

vagyis

$$|x - y| \leq \alpha - \beta.$$

Tehát $\alpha - \beta$ felső korlátja az A halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik kisebb felső korlátja az A halmaznak. Legyen $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan felső korlát, melyre $\delta < \alpha - \beta$ teljesül. Vezessük be a pozitív $\varepsilon = \dfrac{\alpha - \beta - \delta}{2}$ paramétert. Ekkor létezik olyan $x, y \in H$, melyre $\alpha - \varepsilon < x$ és $y < \beta + \varepsilon$ teljesül, vagyis

$$x - y > \alpha - \varepsilon - \beta - \varepsilon = \delta > 0.$$

Tehát van olyan $x, y \in H$ elem, melyre $|x - y| > \delta$ teljesül, tehát δ nem felső korlátja az A halmaznak.

8.3. Riemann-integrálás alaptulajdonságai

8.6. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + g, cf, fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, vagyis az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ algebra, valamint*

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f \qquad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, melyre

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{4} < s_x(f) \leq S_x(f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$\int_a^b g - \frac{\varepsilon}{4} < s_y(g) \leq S_y(g) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. A továbbiakban felhasználjuk, hogy bármely $z = (z_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén

$$s_z(f) + s_z(g) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\inf_{t\in[z_i,z_{i+1}]} f(t) + \inf_{t\in[z_i,z_{i+1}]} g(t)\right)(z_{i+1} - z_i) \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left(\inf_{t\in[z_i,z_{i+1}]}(f(t) + g(t))\right)(z_{i+1} - z_i) = s_z(f + g)$$

$$S_z(f)+S_z(g)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{t\in[z_i,z_{i+1}]}f(t)+\sup_{t\in[z_i,z_{i+1}]}g(t)\right)(z_{i+1}-z_i)\geq$$
$$\geq\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{t\in[z_i,z_{i+1}]}(f(t)+g(t))\right)(z_{i+1}-z_i)=S_z(f+g).$$

Legyen $z=x\sqcup y$, azaz z az x és az y felosztás egyesítése, ekkor az

$$s_x(f)+s_x(g)\leq s_x(f+g)\leq s_z(f+g)\leq S_z(f+g)\leq S_y(f+g)\leq S_y(f)+S_y(g)$$

egyenlőtlenségek miatt

$$\int_a^b f+\int_a^b g-\frac{\varepsilon}{2}<s_z(f+g)\leq S_z(f+g)<\int_a^b f+\int_a^b g+\frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\Omega_z(f+g)<\varepsilon$. Ez pedig a 8.4 tétel alapján azt jelenti, hogy $f+g\in\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. Továbbá a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\sup s(f+g)\leq\int_a^b f+\int_a^b g \qquad \text{és} \qquad \inf S(f+g)\leq\int_a^b f+\int_a^b g$$

teljesül, vagyis

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g.$$

A számmal való szorzásra vonatkozó szabály egyszerűen igazolható a definíció alapján.
Legyen $f\in\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és $K\in\mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $t\in[a,b]$ esetén $|f(t)|<K$ teljesül. Ekkor minden $u,v\in[a,b]$ elemre

$$\left|f^2(u)-f^2(v)\right|=|f(u)+f(v)|\cdot|f(u)-f(v)|\leq 2K\cdot|f(u)-f(u)|\,.$$

Vagyis bármely $x=(x_i)_{i=0,\ldots,n}\in\mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra a 8.5 tétel alapján

$$\Omega_x(f^2)=\sum_{i=0}^{n-1}\omega(f^2,[x_i,x_{i+1}])\cdot(x_{i+1}-x_i)=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{u,v\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f^2(u)-f^2(v)\right|\right)\cdot(x_{i+1}-x_i)\leq$$
$$\leq\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{u,v\in[x_i,x_{i+1}]}|f(u)-f(v)|\right)\cdot 2K\cdot(x_{i+1}-x_i)=2K\Omega_x(f)$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f^2\in\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. Ha $g\in\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor az $fg=\frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$ egyenlőség alapján $fg\in\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ teljesül.

8.7. Tétel. *Legyen $a,b,c\in\mathbb{R}$ olyan, melyre $a<c<b$, valamint legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $f\in\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha $f\in\mathcal{R}([a,c],\mathbb{R})$ és $f\in\mathcal{R}([c,b],\mathbb{R})$, valamint ebben az esetben*

$$\int\limits_a^b f=\int\limits_a^c f+\int\limits_c^b f.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
1. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, c]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x' felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_{x'}(f) < \varepsilon$. Legyen x_0 az x' és az (a, c, b) felosztás egyesítése. Ekkor $x' \leq x_0$, ezért a 8.1 tétel alapján

$$s_{x'}(f) \leq s_{x_0}(f) \quad \text{és} \quad S_{x'}(f) \geq S_{x_0}(f),$$

vagyis

$$\Omega_{x_0}(f) = S_{x_0}(f) - s_{x_0}(f) \leq S_{x'}(f) - s_{x'}(f) = \Omega_{x'}(f) < \varepsilon.$$

Ha az $x_0 = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztásból csak azokat az x_i pontokat hagyjuk meg, melykere $x_i \leq c$ teljesül, akkor az $[a, c]$ intervallumnak kapjuk x egy felosztását, melyre $\Omega_x(f) \leq \Omega_{x'}(f) < \varepsilon$ teljesül.
A fenti gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[c, b]$ intervallumon is.
2. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$. Legyen $\alpha = \int_a^c f$ és $\beta = \int_c^b f$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül.
Ebből ugyanis egyrészt $\Omega_I(f) < \varepsilon$ következik, vagyis $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, másrészt $\int_a^b f = \alpha + \beta$ adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_1 felosztása az $[a, c]$ intervallumnak, melyre

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_1}(f) \leq S_{x_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül, és mivel $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_2 felosztása a $[c, b]$ intervallumnak, melyre

$$\beta - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_2}(f) \leq S_{x_2}(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Legyen x az x_1 és x_2 felosztások osztópontjainak az egyesítéséből nyert felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. Ekkor a közelítő összegek definíciója alapján

$$s_x(f) = s_{x_1}(f) + s_{x_2}(f) \quad \text{és} \quad S_x(f) = S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f),$$

vagyis a fenti egyenlőtlenségek összeadásából

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) \leq \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik.

8.8. Tétel. *Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Mivel f folytonos függvény és $[a, b]$ kompakt halmaz, ezért a 5.23 Heine-tétel alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $u, v \in [a, b]$ számra

$$|u - v| < \delta \quad \to \quad |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $n = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1$, és minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén legyen

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a),$$

és jelölje x az $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztást. Ekkor a 8.5 tétel alapján

$$\begin{aligned}\Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) < \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

8.9. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Ha $f(b) = f(a)$, akkor a függvény állandó, tehát folytonossága miatt integrálható. Ezért feltesszük, hogy $f(a) < f(b)$.
Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, és vegyünk egy olyan $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztást, melyre minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_{i+1} - x_i < c$ teljesül. (Ilyen felosztás létezik, hiszen ehhez hasonlót konstruáltunk a 8.8 tétel bizonyításában.) Ekkor

$$\begin{aligned}\Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) - \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \cdot c = c(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $c = \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$ paraméterhez választjuk meg a felosztást, akkor $\Omega_x(f) < \varepsilon$.

8.10. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, akkor $|f| \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Mivel minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|,$$

ezért minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ indexre a 8.5 tétel alapján

$$\omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) = \sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} ||f(u)| - |f(v)|| \leq \sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| = \omega(f, [x_i, x_{i+1}]).$$

Ebből pedig

$$\Omega_x(|f|) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \Omega_x(f) < \varepsilon$$

adódik, amiből $|f| \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ következik.

8.11. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ függvényre*

1. *ha $f \geq 0$, akkor $\int\limits_a^b f \geq 0$;*
2. *ha $f \geq g$, akkor $\int\limits_a^b f \geq \int\limits_a^b g$;*
3. $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.
1. Ha $f \geq 0$, akkor az $[a,b]$ intervallum bármely I felosztása esetén $s_I(f), S_I(f) \geq 0$, ezért a közös határértékükre is $\int_a^b f \geq 0$ teljesül.
2. Ha $f \geq g$, akkor a $h = f - g$ függvényre $h \geq 0$ teljesül, valamint h a 8.6 tétel értelmében szintén Riemann-integrálható, és

$$\int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

A tétel 1. pontja alapján $\int_a^b h \geq 0$, ezért $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.
3. Mivel $f \leq |f|$, ezért a 2. pont alapján $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Továbbá a $-|f| \leq f$ egyenlőtlenség miatt $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f$. Ezek alapján $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

8.4. Newton–Leibniz-tétel

8.12. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $F \in C([a,b], \mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon, és itt $F' = f$. Ekkor*

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, $F \in C([a,b], \mathbb{R})$ legyen olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon, és itt $F' = f$ teljesül rá, valamint tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztását. Minden $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén alkalmazzuk az F függvényre a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon. Ekkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ szám, melyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül. Ezeket az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

adódik. Mivel $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén

$$\inf_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) \le f(c_i) \le \sup_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t),$$

ezért

$$s_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) =$$
$$= F(b) - F(a) \le \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i) = S_x(f).$$

Tehát minden x felosztásra

$$s_x(f) \le F(b) - F(a) \le S_x(f)$$

teljesül, amiből f integrálhatósága miatt $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$ következik.

8.13. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon, akkor*

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'.$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon. Ekkor f' folytonos az $[a, b]$ halmazon, tehát $f' \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és innen már a 8.12 Newton–Leibniz-tétel alapján következik az állítás.

8.5. Az integrálfüggvény

8.6. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int\limits_a^x f.$$

8.14. Tétel. *Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.*

1. *Az I_f függvény folytonos.*
2. *Ha f folytonos az $x_0 \in]a, b[$ pontban, akkor I_f differenciálható az x_0 pontban és $I_f'(x_0) = f(x_0)$.*
3. *Ha $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, akkor létezik primitív függvénye.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, $x_0 \in]a, b[$ és jelölje I_f az f integrálfüggvényét. Mivel f korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $|f(x)| < K$.
1. Legyen $x, y \in [a, b]$. Ekkor a 8.7 tétel alapján

$$I_f(x) - I_f(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_y^x f,$$

vagyis felhasználva a 8.11 tételt

$$|I_f(x) - I_f(y)| < K\,|x - y|$$

adódik, amiből az $y \to x$ határértékkel kapjuk az

$$\lim_x I_f = I_x$$

egyenletet, ami az I_f függvény x pontbeli folytonosságát garantálja.
2. Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\forall z \in [a,b] : |z - x_0| < \delta \quad \to \quad |f(z) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy $z \in]x_0, x_0 + \delta[\cap [a,b]$. Ekkor a 8.7 tétel és a fenti egyenlőtlenség alapján

$$I_f(z) - I_f(x_0) = \int_a^z f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^z f$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(z - x_0) \le \int_{x_0}^z f \le (f(x_0) + \varepsilon)(z - x_0),$$

melyek kombinációjából

$$f(x_0) - \varepsilon \le \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} \le f(x_0) + \varepsilon$$

adódik. Vagyis

$$\lim_{z \to x_0 + 0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

Teljesen hasonlóan igazolható, hogy az x_0 pontban vett bal oldali határérték is létezik és értéke $f(x_0)$. Tehát

$$I_f'(x_0) = \lim_{z \to x_0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

3. Ha f folytonos, akkor a 2. pont alapján I_f az f egy primitív függvénye.

8.6. Improprius integrál

8.7. Definíció. (*Improprius integrál.*)

- Legyen $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, \infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

  $$\lim_{x \to \infty} \int_a^x f$$

  határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $[a, \infty[$ *intervallumon*, és erre a

  $$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{x \to \infty} \int_a^x f$$

  jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az f *függvény improprius integrálja divergens az* $[a, \infty[$ *intervallumon.*
- Ha $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty, a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,a], \mathbb{R})$ teljesül, és a

  $$\lim_{x \to -\infty} \int_x^a f$$

  határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja a* $]-\infty, a]$ *intervallumon*, és erre a

  $$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $[a,b[$ *intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,b],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to a+} \int_x^b f$$

határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $]a,b]$ *intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x\to a+} \int_x^b f$$

jelölést használjuk.

8.15. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ függvényt.*

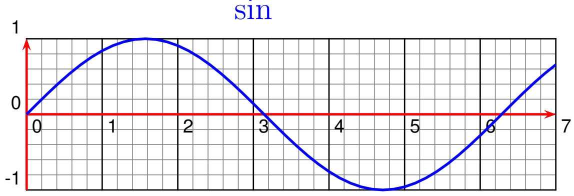
1. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $[a,\infty[$ intervallumon, ha $\alpha > 1$, és ebben az esetben*
$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a^{\alpha-1}(\alpha-1)}.$$
2. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $]0,a]$ intervallumon, ha $\alpha < 1$, és ebben az esetben*
$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Bizonyítás. A 8.12 Newton–Leibniz-formula alapján rövid számolással igazolható.

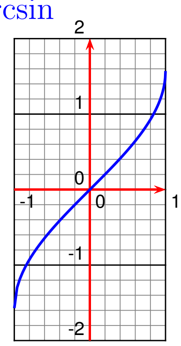
9 Függelék

9.1. Az elemi függvények grafikonjai

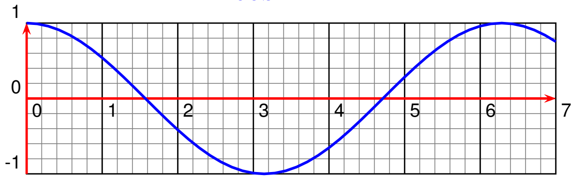
sin



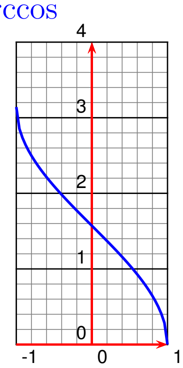
arcsin



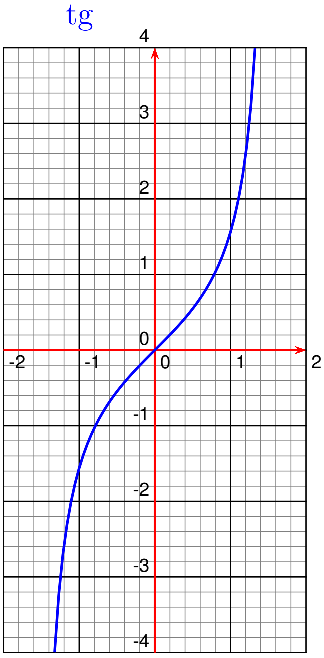
cos



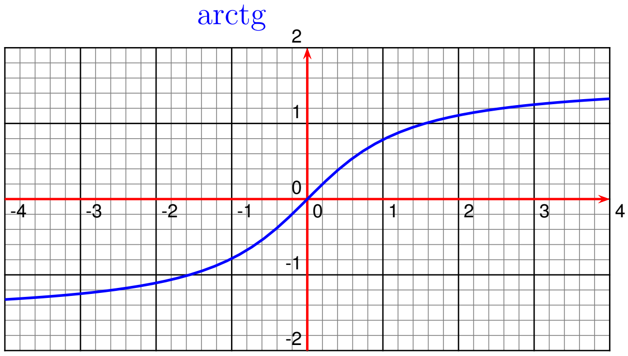
arccos



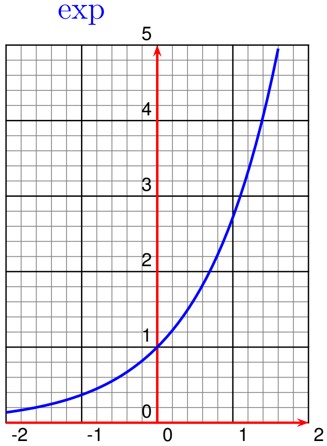
tg



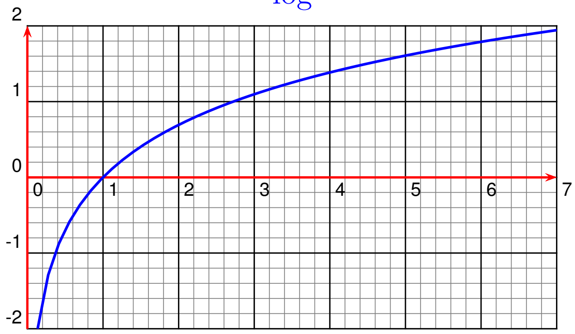
arctg



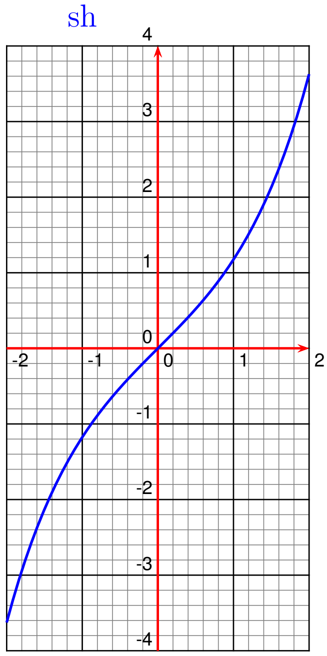
exp



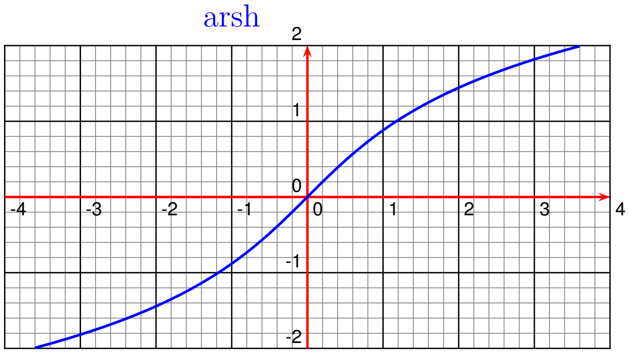
log



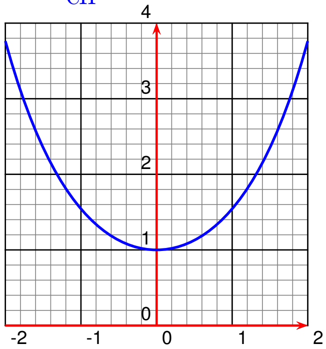
sh



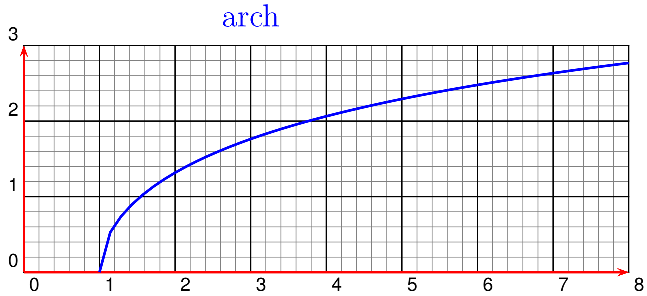
arsh



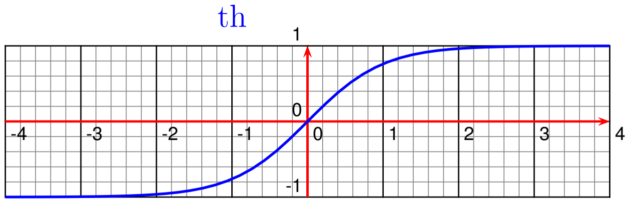
ch



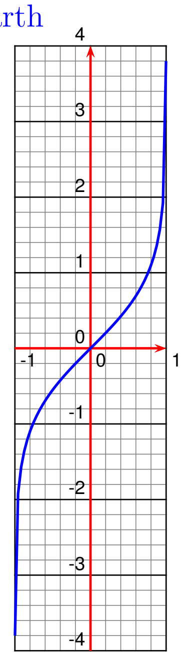
arch



th



arth



9.2. Tizedestörtek

Megszoktuk, hogy a valós számokat (esetleg végtelen) tizedestört alakban lehet felírni, most ennek adjuk meg a precíz matematikai bizonyítását.

9.1. Tétel. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Értelmezzük az*

$$a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - \left[N^{n-1} x\right] \cdot N, & ha \quad n > 0; \\ [x], & ha \quad n = 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

sorozatot. Ekkor

1. *minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a(x)_n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$;*
2. *a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sor konvergens;*
3. *minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a(x)_k}{N^k} = \frac{[N^n x]}{N^n}$;*
4. *$x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ teljesül;*
5. *végtelen sok n természetes számra $a(x)_n < N-1$;*
6. *legyen $b : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$ tetszőleges sorozat; pontosan akkor teljesül az*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}, \tag{9.2}$$

egyenlőség, ha $a(x) = b$ vagy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, valamint minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
1. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges és legyen $y = N^{n-1}x$. Ekkor

$$[N^n x] - \left[N^{n-1} x\right] \cdot N = [N([y] + \{y\})] - [[y] + \{y\}] \cdot N = N[y] + [N\{y\}] - [y]N = [N\{y\}], \tag{9.3}$$

vagyis $a(x)_n$ egész szám, továbbá $a(x)_n \leq N-1$, hiszen ellenkező esetben $\{y\} \geq 1$ teljesülne.
2. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sort majorálja a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n}$ sor, mely konvergens.
3. Az $a(x)$ sorozat definíciója alapján n szerinti teljes indukcióval egyszerűen adódik.
4. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a(x)_k}{N^k}$. Felhasználva, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$N^n x = [N^n x] + \{N^n x\} \tag{9.4}$$

és az előző pont eredményét

$$\alpha_n = \frac{N^n x - \{N^n x\}}{N^n} = x - \frac{\{N^n x\}}{N^n} \tag{9.5}$$

adódik, amiből pedig

$$|x - \alpha_n| < \frac{1}{N^n} \tag{9.6}$$

következik. Vagyis $\lim \alpha = x$.
5. Tegyük fel, hogy csak véges sok n természetes számra teljesül az $a(x)_n < N-1$ egyenlőtlenség. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ természetes számra $a(x)_n = N-1$. Tehát az

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{N}} = \frac{1}{N^{n_0}} \tag{9.7}$$

egyenlőség miatt

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}} \tag{9.8}$$

teljesül, ami ellentmond a 4. bizonyításában szereplő

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| < \frac{1}{N^{n^0}} \tag{9.9}$$

egyenlőtlenségnek.
6. Legyen $b : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$ olyan sorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}, \tag{9.10}$$

teljesül, és tegyük fel, hogy $a(x) \neq b$. Legyen $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} |\ a(x)_n \neq b_n\}$. Ekkor

$$\frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}, \tag{9.11}$$

melynek átrendezéséből

$$\left| \frac{a(x)_{n_0} - b_{n_0}}{N^{n_0}} \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n - b_n}{N^n} \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|a(x)_n - b_n|}{N^n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}} \tag{9.12}$$

adódik, vagyis $|a(x)_{n_0} - b_{n_0}| = 1$. Ha $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, akkor a fenti egyenlőtlenségben csak úgy lehet egyenlőség, ha minden $n > n_0$ esetén

$$|a(x)_n - b_n| = N - 1. \tag{9.13}$$

Továbbá a két sor összege csak akkor egyezhet meg, ha $b_n \geq a(x)_n$. Tekintettel arra, hogy $b_n, a(x)_n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ ezért csak az $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$ megoldása van a fenti egyenlőtlenségnek. A $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ esetben a fentihez hasonló érveléssel azt kapnánk, hogy minden $n > n_0$ számra $a(x)_n = N-1$ és $b_N = 0$. Ekkor viszont

$$x = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0}+1}{N^{n_0}} \tag{9.14}$$

adódik, vagyis az $a(x)$ sorozat definíciója alapján $a_{n_0} + 1 = a_{n_0}$, ami ellentmondás, tehát a $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ eset nem valósulhat meg.
Fordítva, ha $a(x) = b$, akkor a két sor összege nyilván megegyezik. Ha létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$ és minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N - 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}+1}{N^{n_0}} \tag{9.15}$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \tag{9.16}$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{N}} = \tag{9.17}$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \frac{1}{N^{n_0}} \tag{9.18}$$

vagyis a két sor összege megegyezik.

9.1. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, és tekintsük az

$$a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - \left[N^{n-1} x\right] \cdot N, & \text{ha} \quad n > 0; \\ [x], & \text{ha} \quad n > 0 \end{cases} \tag{9.19}$$

sorozatot. Ekkor legyen

$$a(x)_0, a(x)_1 a(x)_2 \cdots := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}, \tag{9.20}$$

melyet az *x szám N alapú számrendszer vett felírásának* nevezünk.

A mindennapi életben az $N = 10$ választással elünk és ekkor az $x \in \mathbb{R}$ szám *tizedesjegyeiről* beszélünk. Továbbá a fenti állításból következik például az

$$1,9999 \cdots = 2 \tag{9.21}$$

egyenlőség, vagyis a több olyan tizedesjegy-sorozat létezhet, mely ugyan azt a valós számot határozza meg.

9.2. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Bizonyítás. Mivel a valós számok a racionális számok bizonyos részhalmazai (Dedekind-szeletei), ezért létezik $j : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ injektív leképezés, vagyis $|\mathbb{R}| \leq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Mivel $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, ezért $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Most a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |\mathbb{R}|$ formulát igazoljuk. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\begin{array}{lll} \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) & E \mapsto s(E) := \left(n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \notin E; \\ 1, & \text{ha} \quad x \in E. \end{cases} \right) \\ \rho : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \to \mathbb{R} & s \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{10^k} \end{array} \tag{9.22}$$

Rövid számolással igazolható, hogy a φ függvény bijekció, valamint a ρ függvény a (9.1) állítás alapján injektív. Tehát $\rho \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ injektív leképezés, vagyis $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.
Tehát $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, vagyis a 1.23 Schröder–Bernstein-tétel alapján $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

9.3. Valós számok szögfüggvényei

9.3. Tétel. *A* sin *és* cos *függvény* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. A sin és cos függvény 2π szerinti periodicitása miatt az

$$x' = x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi}\right] \tag{9.23}$$

számra $\sin x = \sin x'$ és $\cos x = \cos x'$ teljesül, valamint $0 \le x' < 2\pi$. Ekkor a 4.27 addíciós formulák és a 5.31 nevezetes szögek szögfüggvényei alapján

$$\sin x = \begin{cases} \sin x', & \text{ha} \quad 0 \le x' < \frac{\pi}{2}; \\ \cos\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x' < \pi; \\ -\sin\left(x' - \pi\right), & \text{ha} \quad \pi \le x' < \frac{3\pi}{2}; \\ -\cos\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{3\pi}{2} \le x' < 2\pi, \end{cases} \tag{9.24}$$

valamint

$$\cos x = \begin{cases} \cos x', & \text{ha} \quad 0 \le x' < \frac{\pi}{2}; \\ -\sin\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x' < \pi; \\ -\cos\left(x' - \pi\right), & \text{ha} \quad \pi \le x' < \frac{3\pi}{2}; \\ \sin\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{3\pi}{2} \le x' < 2\pi \end{cases} \tag{9.25}$$

adódik.

9.4. Tétel. *A* cos *függvény* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.*

Bizonyítás. Minden $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\frac{\pi}{2} - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, továbbá az addíciós tétel alapján

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \tag{9.26}$$

Ezért ha ismerjük a koszinusz függvényt a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ halmazon, akkor itt a szinusz függvény értékeit is ismerjük, vagyis a 9.3 tétel alapján minden valós szám szögfüggvényét ismerjük.

9.5. Tétel. *Ha* $x \in [0, \pi]$, *akkor*

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \textit{és} \quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}. \tag{9.27}$$

Bizonyítás. Ha $x \in [0, \pi]$, akkor a cos függvényre vonatkozó 4.27 addíciós formula alapján

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \begin{cases} 2\left(\cos^2\frac{x}{2}\right) - 1; \\ 1 - 2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right). \end{cases} \tag{9.28}$$

Mivel $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és ekkor $\sin x, \cos x \ge 0$, ezért a fenti egyenletek átrendezéséből adódik az állítás.

9.6. Tétel. $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $\qquad$ $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Bizonyítás. Elég a $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ formulát igazolni, hiszen $\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}$. Megmutatjuk, hogy $2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ugyanis ebből már a félszögek szöggfüggvényeiről szóló 9.5 tétel alapján már adódik az állítás.
Legyen $x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}$ és $q=2\cos\frac{2\pi}{5}$. Ekkor a 4.22 Euler-tétel alapján

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{2\pi}{5}=q, \tag{9.29}$$

valamint $x^5=1$, vagyis

$$0=x^5-1=\frac{x^5-1}{x-1}=1+x+x^2+x^3+x^4. \tag{9.30}$$

Tehát elég az $1+x+x^2+x^3+x^4=0$ egyenletet kell megoldani az $q=x+\frac{1}{x}$ változóra nézve. Ez viszont egyszerű a

$$0=x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2\right)=x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right)=x^2\left(q^2+q-1\right) \tag{9.31}$$

átalakítások, valamint a $q>0$ feltétel miatt,

$$q=\frac{-1+\sqrt{1+4}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{9.32}$$

9.2. Definíció. Az $x\in\mathbb{R}$ szám *fokban* kifejezett értéke $x\frac{180}{\pi}$ és a fokra utaló $^\circ$ szimbólumot írjuk mellé. (Pl. $x=\frac{\pi}{6}$ esetén $x=30^\circ$.)

9.7. Tétel.

$$\sin 3^\circ=\left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{16}-\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} \tag{9.33}$$

$$\cos 3^\circ=\left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}+\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{16} \tag{9.34}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha=\frac{\pi}{5}$ és $\beta=\frac{\pi}{6}$. Ekkor $\alpha=36^\circ$ és $\beta=30^\circ$. Az α és a β szögfüggvényeit ismerjük a 9.6 és a 5.31 tételből. A 4.27 addíciós formula alapján

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}. \tag{9.35}$$

A félszögekre vonatkozó 9.5 tétel segítségével az $\frac{\alpha-\beta}{2}=3^\circ$ szinusza és koszinusza éppen a tételben leírt értéket adja.

Kiegészítés. Ennek alapján meghatározható a $k \cdot 3^\circ$ alakú számok szinusza és koszinusza, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (Sőt, a szögfelezésre vonatkozó tétel felhasználásával tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\frac{k}{2^n} \cdot 3^\circ$ szögfüggvényei is kiszámolhatók explicit alakban.) Az alábbiakban a kifejezések szimmetriája szerinti elrendezésben szerepelnek a szögek koszinuszai.

$$\begin{cases} \cos 0^\circ = 1 \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 90^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 15^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ \cos 75^\circ = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 9^\circ = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} & \cos 27^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \\ \cos 63^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} + \frac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} & \cos 81^\circ = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 12^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{-1+\sqrt{5}}{8} & \cos 24^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{5}}{8} \\ \cos 48^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{5}}{8} & \cos 84^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-\sqrt{5}}{8} \\ \cos 42^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\frac{-1+\sqrt{5}}{8} & \cos 6^\circ = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\frac{1+\sqrt{5}}{8} \\ \cos 78^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\frac{1-\sqrt{5}}{8} & \cos 66^\circ = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\frac{1+\sqrt{5}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 3^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 21^\circ = \frac{(-1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 33^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 39^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 57^\circ = \frac{(-1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 51^\circ = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 87^\circ = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 69^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\diamondsuit$

9.8. Tétel.

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{17}+15+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-2\left(3+\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}}} \tag{9.36}$$

Bizonyítás. Elég $2\cos\frac{2\pi}{17}$ értékét meghatározni, ugyanis ebből már a félszögek szögfüggvényeiről szóló 9.5 tétel alapján már adódik az állítás.

Legyen $x = \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{17}\right)$ és $q = 2\cos\frac{2\pi}{17}$. Ekkor a 4.22 Euler-tétel alapján

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\frac{2\pi}{17} = q, \tag{9.37}$$

valamint $x^{17} = 1$, vagyis

$$0 = x^{17} - 1 = \frac{x^{17}-1}{x-1} = \sum_{k=0}^{16} x^k. \tag{9.38}$$

Tehát az

$$\sum_{k=0}^{16} x^k = x^8 \cdot \sum_{k=-8}^{8} x^k = 0 \tag{9.39}$$

átalakítás miatt elég az

$$\alpha_0 = \sum_{k=-8}^{8} x^k = 0 \tag{9.40}$$

egyenletet megoldani az $q = x + \frac{1}{x}$ változóra nézve.

A 17 Fermat-prím, ugyanis $n = 2$ esetén $17 = 2^{(2^n)} + 1$. Legyen $p = 17$ és válasszunk egy olyan $g \in \mathbb{N}$ számot, melyre

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \mod p \tag{9.41}$$

teljesül. A továbbiakban a $g = 3$ választással élünk. Az $i \in \{1, 2, 3\}$ esetben definiáljuk az alábbi polinomot.

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{2^{(2^n-i)}-1} x^{\left(g^{k\left(2^i\right)}\right)} \tag{9.42}$$

Az $x^{17} = 1$ felhasználásával az alábbi polinomokat kapjuk.

$$\alpha_1 = x^{-8} + x^{-4} + x^{-2} + x^{-1} + x + x^2 + x^4 + x^8 \tag{9.43}$$
$$\alpha_2 = x^{-4} + x^{-1} + x + x^4 \tag{9.44}$$
$$\alpha_3 = x^{-1} + x \tag{9.45}$$

A háttérben meghúzódó mélyebb okok részletezése nélkül megemlítjük, léteznek olyan $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ polinomok és $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ paraméterek, melyekre

$$\alpha_0 = a_1\alpha_1^2 + b_1\alpha_1 + \beta_1 \tag{9.46}$$
$$\alpha_0 = a_2\alpha_2^2 + b_2\alpha_1\alpha_2 + \beta_2 \tag{9.47}$$
$$\alpha_0 = a_3\alpha_3^2 + b_2\alpha_2\alpha_3 + \beta_3 \tag{9.48}$$

teljesül, ahol $\beta_1 \in \mathbb{R}$, β_2 kifejezhető az α_1 polinommal és β_3 kifejezhető az α_1, α_2 polinommal. Valóban, számolással ellenőrizhető, hogy

$$\alpha_0 = \frac{1}{4}\alpha_1^2 + \frac{1}{4}\alpha_1 - 1 \tag{9.49}$$
$$\alpha_0 = -\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 + 1 \tag{9.50}$$
$$\alpha_0 = 2\alpha_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_2 - 3). \tag{9.51}$$

Tehát az $\alpha_0 = 0$ miatt az első egyenlet alapján

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}. \tag{9.52}$$

Ekkor a második

$$\alpha_2^2 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}\alpha_2 - 1 = 0 \tag{9.53}$$

egyenlet miatt

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}. \tag{9.54}$$

Ezek után a harmadik egyenlet megoldható az α_3 változóra nézve, ami a keresett q érték.

Megjegyzés. A fenti bizonyításban bemutatott módon lehet meghatározni $\cos\frac{\pi}{257}$ és $\cos\frac{\pi}{65537}$ értékét.

$\diamondsuit$

9.4. Jensen-tétel következményei

9.9. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség) Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in [a,b]$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1,\ldots,n$ esetén. Ekkor*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}\right) \tag{9.55}$$

teljesül.

Bizonyítás. A 5.1 Jensen-egyenlőtlenség alkalmazása az $x_1,\ldots,x_n$ pontokra és a $S = \sum_{i=1}^{n}\omega_i$ jelölés mellett az $\frac{\omega_1}{S},\ldots,\frac{\omega_n}{S}$ súlyokra.

9.10. Tétel. *(Súlyozott hatványközép.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1,\ldots,n$ esetén, és minden $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ paraméterre*

$$\alpha(r) \triangleq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i^r}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{9.56}$$

Ekkor az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad r \mapsto \begin{cases} \alpha(r) & ha \quad r \neq 0, \\ \lim\limits_{r\to 0}\alpha(r) & ha \quad r = 0, \end{cases} \tag{9.57}$$

függvény monoton növő.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint minden $i = 1, \dots, n$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az $S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ jelölés mellett vezessük be minden $i = 1, \dots, n$ esetén az $a_i = \frac{\omega_i}{S}$ paramétereket, valamint minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$\alpha(r) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{9.58}$$

Ekkor nyilván $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.
A L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk meg a $\lim_{r \to 0} \alpha(r)$ határértéket.

$$\lim_{r\to 0} \alpha(r) = \lim_{r\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0} \exp\left(\frac{1}{r} \cdot \log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \right)\right) = \exp \lim_{r\to 0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, r} \log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \right)\right) = \tag{9.59}$$

$$= \exp \lim_{r\to 0} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \log x_i = \exp\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i \log x_i \right) = \tag{9.60}$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \log x_i \right) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \tag{9.61}$$

Vagyis a súlyozott hatványközép határértéke a 0 pontban a súlyozott geometriai közép.
Legyen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olyan melyre $0 < r_1 < r_2$ teljesül és tekintsük az

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto x^{\frac{r_2}{r_1}} \tag{9.62}$$

függvényt. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$f''(x) = \frac{r_2}{r_1} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) x^{\frac{r_2}{r_1} - 2} > 0 \tag{9.63}$$

teljesül, vagyis f konvex függvény. A Jensen-egyenlőtlenség alapján ekkor

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_1} \right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f\left(x_i^{r_1} \right) \tag{9.64}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_1} \right)^{\frac{r_2}{r_1}} \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_2} \tag{9.65}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_2} \right)^{\frac{1}{r_2}} \tag{9.66}$$

$$\alpha(r_1) \le \alpha(r_2). \tag{9.67}$$

Az $r_1 < r_2 < 0$ esetben az f függvény konkavitását kihasználva hasonló számolással adódik az $\alpha(r_1) \leq \alpha(r_2)$ egyenlőtlenség.
Azt kell még igazolni, hogy minden $r_1 < 0$ és $r_2 > 0$ esetén

$$\alpha(r_1) \leq \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \leq \alpha(r_2). \tag{9.68}$$

Ehhez elég felírni a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $(x_i^{r_2})_{i=1,\dots,n}$ számokra

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i^{r_2})^{a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_2} \tag{9.69}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right)^{r_2} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_2} \tag{9.70}$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \leq \alpha(r_2), \tag{9.71}$$

illetve hasonló módon az $(x_i^{r_1})_{i=1,\dots,n}$ számokra.

Megjegyzés. Az előző tételt az $\omega_i = 1$, $1 \leq i \leq n$ paraméterekre alkalmazva az $f(-1) \leq f(0) \leq f(1)$ összefüggés adja a harmonikus-számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{9.72}$$

◊

9.5. Wallis- és Stirling-formula

9.11. Tétel. *(Wallis-formula.)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{\pi} \tag{9.73}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}\, x \tag{9.74}$$

sorozatot. Ekkor elemi számolás alapján $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$ és $a_1 = 1$ nyilván teljesül, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a parciális integrálás szabályát felhasználva

$$a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n+1} x \,\mathrm{d}\, x = \left[-\cos x \cdot \sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^n x \,\mathrm{d}\, x = \tag{9.75}$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^n x \,\mathrm{d}\, x = (n+1)(a_n - a_{n+2}) \tag{9.76}$$

adódik, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$. Ennek a segítségével teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad a_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \tag{9.77}$$

teljesül. Szintén teljes indukcióval adódik az állításban szereplő formulára a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{\pi}{2a_{2n}} \tag{9.78}$$

felírás, tehát a bizonyítandó formula ekvivalens a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{n}a_{2n}} = \sqrt{\pi} \tag{9.79}$$

határértékkel, amihez elég megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} 4na_{2n}^2 = \pi \tag{9.80}$$

teljesül.
Mivel miden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n}a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{9.81}$$

továbbá az a sorozat monoton fogyó, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = a_{2n}a_{2n+1} \leq a_{2n}^2 \leq a_{2(n-1)}a_{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \tag{9.82}$$

teljesül, amiből az

$$\frac{4n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \leq 4na_{2n}^2 \leq \frac{4n}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \tag{9.83}$$

egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{n\to\infty} 4na_{2n}^2 = \pi \tag{9.84}$$

adódik, amivel igazoltuk az állítással ekvivalens 9.80 határértéket.

9.12. Tétel. *(Stirling-formula.)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \tag{9.85}$$

Valamint $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ esetén a faktoriálisra érvényes a

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right) \tag{9.86}$$

becslés.

Bizonyítás. Definiáljuk az alábbi függvényt.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \tag{9.87}$$

A : $]-1,\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\log(1+x)$ függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-közelítése alapján minden $x\in[0,1]$ esetén létezik olyan $c\in[0,x]$ paraméter, melyre

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{6}{(1+c)^4}\cdot\frac{1}{4!}x^4 \tag{9.88}$$

teljesül, vagyis

$$g(x)=-\frac{6}{(1+c)^4}\cdot\frac{1}{4!}x^4, \tag{9.89}$$

amiből következik, hogy minden $x\in[0,1]$ esetén

$$0\geq g(x)\geq-\frac{x^4}{4}. \tag{9.90}$$

Tekintsük a

$$a:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto\log\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}\right) \tag{9.91}$$

sorozatot, amit $n\in\mathbb{N}$ esetén az

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\log k+\frac{1}{2}\log n-n(\log n-1) \tag{9.92}$$

alakban is felírhatunk. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $b:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1}k(b_{k+1}-b_k)=(n-1)b_n-\sum_{k=1}^{n-1}b_k\qquad\text{és}\qquad\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=b_n-b_1, \tag{9.93}$$

ezt alkalmazva a $b_k=\log k$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1}k(\log(k+1)-\log k)=(n-1)\log n-\sum_{k=1}^{n-1}\log k\qquad\text{és}\qquad\sum_{k=1}^{n-1}(\log(k+1)-\log k)=\log n \tag{9.94}$$

adódik. Ezért

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\log k+\frac{1}{2}\log n-n(\log n-1)= \tag{9.95}$$

$$=(n-1)\log n-\sum_{k=1}^{n-1}k(\log(k+1)-\log k)+\frac{1}{2}\log n-n\log n+n= \tag{9.96}$$

$$=-\frac{1}{2}\log n-\sum_{k=1}^{n-1}k(\log(k+1)-\log k)+n= \tag{9.97}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(\log(k+1)-\log k)-\sum_{k=1}^{n-1}k(\log(k+1)-\log k)+n= \tag{9.98}$$

$$=n-\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right). \tag{9.99}$$

Az a sorozat ezen alakját kifejezhetjük a g függvény segítségével.

$$a_n = n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(g\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}\right) = \tag{9.100}$$

$$= n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)+1+\frac{1}{12k^2}+\frac{1}{6k^3}\right) = \tag{9.101}$$

$$= 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right) \tag{9.102}$$

Az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$ és az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3}$ sorozatnak létezik határértéke. A $\sum_{k}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)$ sor abszolút konvergens, ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} < \infty \tag{9.103}$$

teljesül, ezért konvergens is. Vagyis az a sorozat konvergens. Legyen $A = \lim a$. Mivel a sorozat minden részsorozata konvergens ugyan azzal a határértékkel ezért $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = A$ is teljesül, és ezek alapján

$$\mathrm{e}^A = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{2a_n}}{\mathrm{e}^{a_{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}}{\frac{(2n)!}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{4^n(n!)^2}{(2n!)} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1} = \sqrt{2\pi}, \tag{9.104}$$

ahol felhasználtuk a Wallis-formulát. Tehát $A = \frac{1}{2}\log(2\pi)$, amiből

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} \tag{9.105}$$

következik. Továbbá

$$n! = \mathrm{e}^{a_n}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e}^{a_n-A}\cdot\mathrm{e}^A\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \tag{9.106}$$

$$= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\exp\left(1-\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)-\right. \tag{9.107}$$

$$\left.-\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k^3}-\sum_{k=1}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) = \tag{9.108}$$

$$= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\exp\left(\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3}+\sum_{k=n}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{9.109}$$

teljesül. A

$$\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x \tag{9.110}$$

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^3} \le \int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x \tag{9.111}$$

$$-\frac{1}{4}\int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^4}\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{k=n}^\infty -\frac{1}{4k^4}\left(k+\frac{1}{2}\right) \le \sum_{k=n}^\infty \left(k+\frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \le \sum_{k=n}^\infty \left(k+\frac{1}{2}\right) 0 = 0 \tag{9.112}$$

becslések alapján

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n}+\frac{1}{12n^2}-\frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right) \tag{9.113}$$

teljesül.

9.13. Tétel. *Legyen*

$$a:\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n. \tag{9.114}$$

Ekkor az a sorozat monoton fogyó, minden $n \in \mathbb{N}^+$ elemre

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \le a_n \le 1 \tag{9.115}$$

teljesül, valamint az a sorozat konvergens.

Bizonyítás. Ahhoz hogy az

$$a:\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto a_n \triangleq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n. \tag{9.116}$$

sorozat monoton csökkenéség igazoljuk, azt kell megmutatnunk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \ge a_{n+1}$. Ezt ekvivalens lépésekkel átalakítva

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \ge \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1) \tag{9.117}$$

$$-\log n \ge \frac{1}{n+1} - \log(n+1) \tag{9.118}$$

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) \ge \frac{1}{n+1} \tag{9.119}$$

$$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \ge 1 \tag{9.120}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge 1 \tag{9.121}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \mathrm{e} \tag{9.122}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \tag{9.123}$$

adódik. Tehát elég azt igazolni, hogy minden $m,n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{9.124}$$

Ehhez tekintsük az $a_1 = \cdots = a_m = 1 + \dfrac{1}{m}$ és a $b_1 = \cdots = b_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}$ számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\sqrt[n+m+1]{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}} \le \frac{m\left(1+\frac{1}{m}\right)+(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}{m+n+1} = \frac{m+1+n}{m+n+1} = 1 \tag{9.125}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} \le 1 \tag{9.126}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{9.127}$$

Mivel $a_1 = 1$ és a monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \le 1$.
Az alsó becsléshez minden $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ esetén tekintük az

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \tag{9.128}$$

átalakítást. Mivel az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény konvex, ezért minden $k \in \{1,\dots,n-1\}$ esetén minden $x \in [k,k+1]$ számra a $t = k+1-x \in [0,1]$ paraméter mellett

$$f(tk+(1-t)(k+1)) \le tf(k)+(1-t)f(k+1) \tag{9.129}$$

$$f(x) \le \frac{k+1-x}{k} + \frac{x-k}{k+1} \tag{9.130}$$

$$\frac{1}{x} \le \frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x) \tag{9.131}$$

teljesül, vagyis

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \le \int_k^{k+1}\frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right). \tag{9.132}$$

Ezek alapján minden $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ számra

$$\log n \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}, \tag{9.133}$$

ezért

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}. \tag{9.134}$$

9.3. Definíció. A

$$\gamma \triangleq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) \tag{9.135}$$

számot *Euler–Mascheroni-féle állandónak* nevezzük.

Kiegészítés. Még nem ismert, hogy γ racionális szám-e.

◊

9.6. A gamma függvény

9.14. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az*

$$\int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \tag{9.136}$$

improprius integrál konvergens.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$.
Az $x = 1$ esetben egyszerű számolással igazolható az improprius integrál konvergenciája.
Ha $x \in\,]0,1[$, akkor megmutatjuk, hogy az

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \qquad \text{és} \qquad \int_1^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \tag{9.137}$$

improprius integrál konvergens, tehát ezek összege is konvergens.
Tekintsük az

$$I : \,]0,1] \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_a^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \tag{9.138}$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton csökkenő és a minden $a \in\,]0,1]$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_a^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \le \int_1^a t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} \le \frac{1}{x} \tag{9.139}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$ határérték, vagyis az első integrál is konvergens.
Tekintsük az

$$I : [1,\infty[\, \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_1^a t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \tag{9.140}$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növő és a minden $a \in [1,\infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_1^a t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \le \int_1^a \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-a} \le \mathrm{e}^{-1} \tag{9.141}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$ határérték, vagyis a második integrál is konvergens.
Ha $x \in\,]1,\infty[$, akkor az $a = x-1$ paraméter pozitív. Legyen $n = [a]+1$. A L'Hospital-szabályt n-szer alkalmazva kapjuk a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} = 0 \tag{9.142}$$

határértéket, ami alapján létezik olyan $t_0 \in\,]1,\infty[$, hogy minden $t \in\,]t_0,\infty[$ számra

$$\frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} < 1. \tag{9.143}$$

Ekkor minden $t_0 < t$ paraméterre

$$0 \leq t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \leq t^n\,\mathrm{e}^{-t} \leq \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \tag{9.144}$$

teljesül. Tekintsük az

$$I : [t_0, \infty[\, \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_{t_0}^{a} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \tag{9.145}$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növő és a minden $a \in [t_0, \infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) \leq \int_{t_0}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,t = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}} \leq 2 \tag{9.146}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$ határérték. Vagyis az

$$\int_{0}^{t_0} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \tag{9.147}$$

összeg létezik, ami nem más mint $\displaystyle\int_{0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$.

9.4. Definíció. A

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_{0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \tag{9.148}$$

függvényt *Euler-féle gamma-függvénynek* nevezzük.

9.15. Tétel. *(Az Euler-féle gamma-függvény és a faktoriális kapcsolata.)*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. *Minden* $x \in \mathbb{R}^+$ *esetén* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $n! = \Gamma(n+1)$ *teljesül.*

Bizonyítás. 1. $\displaystyle\Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{a\to\infty} \left[-\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty} -\,\mathrm{e}^{-a} + 1 = 1.$

2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén parciális integrállással számolva

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{\infty} 1 \cdot t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \tag{9.149}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[t \cdot t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a - \int_{0}^{\infty} t\left((x-1)t^{x-2}\,\mathrm{e}^{-t} - t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}\,t = \tag{9.150}$$

$$= -(x-1)\int_{0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{\infty} t^{x}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \tag{9.151}$$

adódik, vagyis

$$\Gamma(x) = -(x-1)\Gamma(x) + \Gamma(x+1). \tag{9.152}$$

3. Az első két állítás segítségével n szerinti teljes indukcióval igazolható.

9.7. Az analitikus számelmélet pár tétele

9.16. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n. \tag{9.153}$$

1. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in]0,1[$ esetén $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$.*
2. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük az

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \tag{9.154}$$

függvényt. Ha $x \in \,]0,1[$, akkor

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \tag{9.155}$$

nyilván teljesül.
Legyen $m, k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor a k paraméter szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy a $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m(x) = x^m$) függvényre

$$\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m\right)^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}, & \text{ha} \quad k \le m \\ 0, & \text{ha} \quad k > m \end{cases} \tag{9.156}$$

teljesül. Ezért

$$f_n^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n \binom{n}{i} (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})^i \right)^{(k)} (x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n+i}\right)^{(k)}(x) = \tag{9.157}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}, & \text{ha} \quad k \le n+i \\ 0, & \text{ha} \quad k > n+i \end{matrix} \right\}, \tag{9.158}$$

vagyis
– ha $0 \le k < n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}, \tag{9.159}$$

tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$;
– ha $n \le k \le 2n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}, \tag{9.160}$$

tehát

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-n}}{(n-(k-n))!(k-n)!} \cdot \frac{(n+k-n)!}{(n+k-n-k)!} = \frac{(-1)^{k-n} k!}{(2n-k)!(k-n)!} = (-1)^{k-n} \binom{k}{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!}, \tag{9.161}$$

amiből $\binom{k}{k-n}, \dfrac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{Z}$ miatt $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ következik;
– ha $2n < k$, akkor $f_n^{(k)}(x) = 0$, tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Tehát minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f_n(x) = f_n(1-x)$ érvényes, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

9.17. Tétel. *A π^2 szám irracionális.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n. \tag{9.162}$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $a, b \in \mathbb{N}^+$ pár melyre $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x) \tag{9.163}$$

függvényt. A 9.16 állítás alapján $F_n(0), F_n(1) \in \mathbb{Z}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_n''(x) + \pi^2 F_n(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) + b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = \tag{9.164}$$

$$= b^n \sum_{k=1}^{n+1} -(-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) + b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = \tag{9.165}$$

$$= b^n (-1)^{n+2} \pi^0 f_n^{(2n+2)}(x) + b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = a^n \pi^2 f_n(x) \tag{9.166}$$

teljesül, ugyanis f_n egy $2n$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(2n+2)} = 0$.
Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x). \tag{9.167}$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n''(x)\sin(\pi x) + \pi F_n'(x)\cos(\pi x) - \pi F_n'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x)\sin(\pi x) = a^n \pi^2 f_n(x)\sin(\pi x), \tag{9.168}$$

ezért

$$a^n \pi \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi}(\varphi_n(1) - \varphi_n(0)) = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbb{Z}. \tag{9.169}$$

Valamint a 9.16 állításban szereplő becslés alapján

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x) \, \mathrm{d}\, x < \frac{\pi a^n}{n!} \tag{9.170}$$

teljesül. Mivel a 3.29 állítás miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi a^n}{n!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left|\frac{\pi a^n}{n!}\right| < \frac{1}{2}. \tag{9.171}$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a^n \pi \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x) \, \mathrm{d}\, x$ olyan egész szám lenne, mely a $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ intervallumban helyezkedik el, ezzel ellentmondást kaptunk.

9.18. Tétel. *Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \frac{a}{b}$ és*

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} \left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{9.172}$$

1. *Minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ szám esetén $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$.*
2. *Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.*
3. *Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \frac{a}{b}$ és

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} \left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{9.173}$$

A binomiális kifejtési tétel alapján a g_n függvény a

$$g_n(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} (x-\alpha)^{2l} \tag{9.174}$$

alakban is felírható. Tehát a 9.16 tétel bizonyításában részletezett deriválási szabály alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_n^{(k)}(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \left\{ \begin{array}{lll} \frac{(2l)!}{(2l-k)!}(x-\alpha)^{2l-k}, & \text{ha} & k \le 2l; \\ 0, & \text{ha} & k > 2l. \end{array} \right\} \tag{9.175}$$

1. A fenti felírásból rögtön adódik, hogy minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ számra $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$ teljesül.
2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel $k = 2m$ alakban.
Ha $m > 2n-1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, vagyis $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $m \le 2n-1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \frac{(2l)!}{(2l-2m)!} 0^{2l-2m}. \tag{9.176}$$

Tehát ha $m < n$, akkor $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $n \le m \le 2n-1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!(2n-1-m)!} a^{4n-2m-2} b^{2m+1-n} \frac{(2m)!}{1} \cdot 1. \tag{9.177}$$

Mivel $0 \le 4n-2m-2$ és $0 \le 2m+1-n$, ezért $a^{4n-2m-2}, b^{2m+1-n} \in \mathbb{N}$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $\frac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} \in \mathbb{Z}$. Ez viszont a

$$\frac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} = \binom{2n-1}{m} \cdot \frac{(2m)!}{(2n-1)} \cdot \frac{m!}{(m-n)!} \tag{9.178}$$

felbontásból látszik, hiszen $\binom{2n-1}{m}, \frac{(2m)!}{(2n-1)}, \frac{m!}{(m-n)!} \in \mathbb{N}^+$.
3. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel a $k = 2m$ alakban. A g_n függvény a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}(a-bx)^{2n}(2a-bx)^n}{(n-1)!} \tag{9.179}$$

alakjából világos, hogy egy $4n-2$ fokszámú polinom, amit fel lehet írni a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^l = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^{n-1+l} \tag{9.180}$$

formában, ahol $c_0, \dots, c_{3n-1} \in \mathbb{Z}$. Ebből

$$g_n^{(2m)}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{l=0}^{3n-1} c_l \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(n-1+l)!}{(n-1+l-2m)!}x^{n-1+l-2m}, & \text{ha} \quad 2m \le n-1+l; \\ 0, & \text{ha} \quad 2m > n-1+l \end{array} \right\} \tag{9.181}$$

adódik.
Vagyis ha $m > 2n-1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, ezért $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $m < \frac{n-1}{2}$, akkor $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ szintén teljesül.
Ha $\frac{n-1}{2} \le m \le 2n-1$, akkor

$$g_n^{(2m)}(0) = \frac{1}{(n-1)!}c_{2m-n+1}\frac{(n-1+2m-n+1)!}{1} \cdot 1 = c_{2m-n+1}\frac{(2m)!}{(n-1)!} \tag{9.182}$$

ami a $n-1 \le 2m$ egyenlőtlenség miatt egész szám.

9.19. Tétel. *Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, akkor e^x irracionális.*

Bizonyítás. A minden $x \in \mathbb{R}$ számra érvényes $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ összefüggés miatt elég minden $\mathbb{Q} \cap]0, \infty[$ számra igazolni az állítást.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\alpha = \frac{a}{b}$ és $\mathrm{e}^\alpha = \frac{c}{d}$ teljesül, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$.
Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1}\frac{(x-\alpha)^{2n}\left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{9.183}$$

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) \tag{9.184}$$

függvényt. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_n(x) - F_n''(x) + = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=1}^{2n} f_n^{(2k)}(x) = \tag{9.185}$$

$$= f_n(x) - f_n^{(4n)}(x) = f_n(x) \tag{9.186}$$

teljesül, ugyanis f_n egy $4n-2$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(4n)} = 0$.
Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto F_n(x)\,\mathrm{ch}(x) - F_n'(x)\,\mathrm{sh}(x). \tag{9.187}$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n'(x)\,\mathrm{ch}(x) + F_n(x)\,\mathrm{sh}(x) - F_n''(x)\,\mathrm{sh}(x) - F_n'(x)\,\mathrm{ch}(x) = f_n(x)\,\mathrm{sh}(x), \tag{9.188}$$

ezért

$$\int_0^\alpha f_n(x)\operatorname{sh}(x)\ \mathrm{d}\,x = \varphi_n(\alpha) - \varphi_n(0) = F_n(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha) - F_n'(\alpha)\operatorname{sh}(\alpha) - F_n(0). \tag{9.189}$$

A 9.18 alapján $F_n'(\alpha) = 0$ és $F_n(\alpha), F_n(0) \in \mathbb{Z}$. Továbbá az $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{c}{d}$ feltevés miatt $\operatorname{ch}\alpha = \dfrac{p}{q}$ alakú, ahol $p = c^2 + d^2$, $q = 2cd$, vagyis $p, q \in \mathbb{N}^+$. Ezért

$$Z_n = q\int_0^\alpha f_n(x)\operatorname{sh}(x)\ \mathrm{d}\,x \in \mathbb{Z} \tag{9.190}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel minden $0 < x < \alpha$ számra $0 < f_n(x), \operatorname{sh}(x)$, ezért $0 < Z_n$, valamint minden $0 < x < \alpha$ számra

$$f_n(x)\operatorname{sh}(x) \le b^{3n-1}\frac{\alpha^{2n}(\alpha^2)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sh}\alpha = a^2\operatorname{sh}(\alpha)\frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{9.191}$$

ezért

$$Z_n \le a^2\alpha\operatorname{sh}(\alpha)\frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{9.192}$$

Mivel a 3.29 állítás miatt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left|a^2\alpha\operatorname{sh}(\alpha)\frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!}\right| < \frac{1}{2}. \tag{9.193}$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén Z_n olyan egész szám lenne, melyre $0 < Z_n < \dfrac{1}{2}$ teljesülne.

9.20. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén elölje $\mathcal{P}_n$ az n számnál kisebb prímszámok halmazát. Ekkor*

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\frac{1}{p} \ge \log\log n - 2. \tag{9.194}$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n} \tag{9.195}$$

teljesül, ebből viszont

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le 2 \tag{9.196}$$

adódik.
Ha $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, akkor a 6.31 tétel alapján

$$\log\frac{1}{1-x} = -\log\frac{1}{1+(-x)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} \tag{9.197}$$

teljesül, aminél felhasználva, hogy $x \leq \dfrac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{k+3} \leq x + \frac{x^2}{2} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{2} = \tag{9.198}$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x + x^2 \tag{9.199}$$

adódik, vagyis minden $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ esetén

$$\log \frac{1}{1-x} \leq x + x^2. \tag{9.200}$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ekkor az $f, g : [1, n+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$g = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1[} + \frac{1}{n} \chi_{[k,k+1[} \tag{9.201}$$

függvényekre minden $x \in [1, n+1]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, ezért

$$\int_1^{n+1} f \leq \int_1^{n+1} g. \tag{9.202}$$

Mivel

$$\int_1^{n+1} f = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \qquad \text{és} \qquad \int_1^{n+1} g = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{9.203}$$

és a log függvény monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra

$$\log n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{9.204}$$

teljesül.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq 3$. Minden p prímszám esetén legyen $\mu_p(n)$ az az egyértelműen meghatározott egész szám, melyre

$$p^{\mu_p(n)-1} \leq x < p^{\mu_p(n)} \tag{9.205}$$

teljesül. Definiáljuk az

$$A(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\mu_p(n)} \frac{1}{p^k} \tag{9.206}$$

számot. A számelmélet alaptétele szerint minden pozitív természetes szám egyértelműen felbontható prímszámok szorzatára. Ezért az

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_1^{\mu_{p_1}(n)}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_2^{\mu_{p_2}(n)}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k} + \cdots + \frac{1}{p_k^{\mu_{p_k}(n)}}\right) \tag{9.207}$$

szorzatban minden $\dfrac{1}{k}$ alakú szám előfordul $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ezért

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} > A(n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log n, \tag{9.208}$$

aminek a logaritmusát véve

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\frac{1}{p}+\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\frac{1}{p^2}>\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\log\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\geq\log\log x. \tag{9.209}$$

Ebből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

9.5. Definíció. Az $x\in\mathbb{R}$ számot *algebrai számnak* nevezünk, ha létezik olyan egész együtthatós, nem nulladfokú polinom, melynek x gyöke. A nem algebrai számokat *transzcendens* számoknak nevezzük.

Megjegyzés.

9.21. Tétel. *(Az algebrai számok alaptulajdonságai.)*

1. *Az algebrai számok rendezett testet alkotnak.*
2. *Ha egy polinom együtthatói algebrai számok, akkor a polinom gyökei is algebrai számok.*
3. *Az algebrai számok halmaza megszámlálható.*
4. *Az algebrai számok halmaza nulla mértékű.*

$\Diamond$

9.22. Tétel. *Az* e *szám transzcendens.*

Bizonyítás. Minden $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ polinom esetén legyen $\tilde{p}(x)=\sum_{i=0}^{n}|a_i|\,x^i$ és

$$I_p:[0,\infty[\,\to\mathbb{C}\qquad t\mapsto\int_0^t \mathrm{e}^{t-x}\,p(x)\ \mathrm{d}\,x. \tag{9.210}$$

Parciális integrálással

$$I_p(t)=\mathrm{e}^t\sum_{i=0}^{n}p^{(i)}(0)-\sum_{i=0}^{n}p^{(i)}(t) \tag{9.211}$$

adódik, valamint egyszerűen becsülhető $|I_p(t)|$

$$|I_p(t)|\leq|t|\cdot\left(\sup_{x\in[0,t]}\left|\mathrm{e}^{t-x}\right|\right)\cdot\left(\sup_{x\in[0,t]}|p(x)|\right)\leq t\,\mathrm{e}^t\,\tilde{p}(t). \tag{9.212}$$

Tegyük fel, hogy e gyöke a

$$p(x)=\sum_{i=0}^{r}a_ix^i \tag{9.213}$$

polinomnak, ahol minden $i=0,\ldots,r$ esetén $a_i\in\mathbb{Z}$, valamint $a_0,a_r\neq0$. Legyen p olyan prímszám, melyre $p>\max\{r,|a_0|\}$ teljesül. Legyen $f(x)=x^{p-1}\prod_{i=1}^{r}(x-i)^p$ és tekintsük a $J=\sum_{i=0}^{r}a_iI_f(i)$ számot, melynek definíciójából adódik, hogy $J\in\mathbb{Z}$. Mivel $p(\mathrm{e})=0$, ezért $J=-\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{(r+1)p-1}a_if^{(j)}(i)$, amit átírhatunk a

$$J=-\sum_{j=p-1}^{(r+1)p-1}a_0f^{(j)}(0)-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=p}^{(r+1)p-1}a_if^{(j)}(i) \tag{9.214}$$

alakba. Itt a jobb oldalon minden tagnak osztója a $p!$ kivéve az $a_0 f^{(p-1)}(0) = a_0(p-1)!(-1)^{rp}(r!)^p$ tagot. Mivel $p > |a_0|$ ezért $|J|$ olyan egész, melynek nem oszthatója a $p!$, de $(p-1)!$ már igen, ezért $(p-1)! \leq |J|$. Valamint minden $k = 0, \ldots, r$ szám esetén

$$|I_f(k)| \leq k\,\mathrm{e}^k\,\tilde{f}(k) = k\,\mathrm{e}^k\,k^{p-1}\prod_{i=1}^{r}(k+i)^p \leq \mathrm{e}^k(2r)^{(r+1)p}. \tag{9.215}$$

Vagyis

$$|J| \leq \sum_{k=0}^{r}|a_k|\,|I_f(k)| \leq \sum_{k=0}^{r}|a_k|\,\mathrm{e}^k(2r)^{(r+1)p} \leq \alpha\beta^p, \tag{9.216}$$

ahol $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{r}|a_k|\,\mathrm{e}^k$ és $\beta = (2r)^{r+1}$. Tehát az alábbi becslésünk adódik

$$1 \leq \frac{|J|}{(p-1)!} \leq \frac{\alpha\beta^p}{(p-1)!}, \tag{9.217}$$

ami ellentmondáshoz vezet, hiszen $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha\beta^n}{(n-1)!} = 0$.

Kiegészítés. Ismeretlen, hogy többek között az $\mathrm{e}\pm\pi$, az $\mathrm{e}\,\pi$ és a $\zeta(3)$ számok algebrai számok-e. $\diamondsuit$

Tárgymutató