Algebra1 1. PótZH megoldásai

1. feladat

$$(g,h)^k = \left(g^k, h^k\right) = (e_G, e_H) \Leftrightarrow g^k = e_G \text{ és } h^k = e_H$$

Csak úgy lehet, ha $\sigma(g) \mid k$ egész $\sigma(h) \mid k$ (a rend definíciójából). Mint a legkisebb (pozitív) ilyen szám, a megoldás $k = \text{lkkt}(\sigma(g), \sigma(h))$. Ha bármelyik végtelen (pl. $\sigma(g)$), akkor a direkt szorzatban is végtelen a rend, mert

$$\nexists k > 0 \text{ úgy, hogy } g^k = e_G$$

2. feladat Legyen $M, N, H \lhd G$.

- $MN \lhd G$ mert

$$gMNg^{-1} = \underbrace{gMg^{-1}}_{M \text{ normálosztó}} \underbrace{gNg^{-1}}_{N \text{ normálosztó}} = MN$$

- $M(NH) = (MN)H$ mert az elemekre igaz az asszociativitás:

$$M(NH) \triangleq \{m \cdot n \cdot h \mid m \in M, n \in N, h \in H\} = (MN)H$$

- $MN = MN$ mert

$$MN \triangleq \{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\} = \bigcup_{n \in N} \underbrace{Mn}_{M \text{ normálosztó}} =$$

$$\bigcup_{n \in N} nM = \{n \cdot m \mid m \in M, n \in N\} = NM$$

3. feladat Ez a szeptember 27-ei gyakorlat 2. feladatata volt.

Algebra1 2. PótZH megoldásai

1. feladat A Sylow tételekből tudjuk, hogy

$$|\text{Syl}_{17}(G)| =: x \equiv 1 \mod 17$$
$$x \mid 204$$

Ebből $x = 1, 18, \ldots$, de ezek közül csak az 1 jó, mert a nagyobbakra már túl sok eleme lenne a csoportnak:

$$18 \cdot 17 - 17 > 204$$

A 17 elemű Sylow-ok csak az egységben metszenek össze.

Így egy darab 17-Sylow van és tanultuk, hogy ekkor az normálosztó is.

2. feladat G egy véges p-csoport, így van nemtriviális centruma: $Z(G) \lhd G$ és $|Z(G)| \in \{p, p^2, p^3\}$.

- Ha $|Z(G)| = p$

$$G \underbrace{\rhd}_{p^2} Z \underbrace{\rhd}_{Z \text{ Ábel}} \{e\}$$

- Ha $|Z(G)| = p^2$

$$G \underbrace{\rhd}_{p} Z \underbrace{\rhd}_{Z \text{ Ábel}} \{e\}$$

- Ha $|Z(G)| = p^3 \Rightarrow G = Z(G)$, így G Ábel és Ábel csoport feloldható.

Akárhogy is, a normálláncban mindig Ábel csoportok a faktorok, mert volt, hogy p és p^2 rendű csoport Ábel.

3. feladat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ez a függvény olyan, hogy $x \cdot f(x)$ a csupa 1 függvény, kivéve a 0-ban, mert ott 0. Az ideál zárt a szorzásra, szóval ez a „csupa 1” függvény is az ideálban van. Ez a függvény pedig generálja az összes olyan függvényt, ami a 0-ban 0, máshol meg akármi.

Viszont az x függvénnyel szorozva valamit, biztosan olyan az eredmény, hogy 0-ban 0, így a két irányú tartalmazás miatt egyenlőség áll fenn.

$$(x) = \{f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \lhd \{f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}\}$$