Algebra1 segédlet

matematika Bsc

2017. október 25.

1. Állítás. *Legyen $k > 1$ egész és p prím. Ekkor $\mathbb{Z}_{p^k}$-nak van p^{k-1} rendű részcsoportja.*

Bizonyítás. Legyenek

$$\mathbb{Z}_{p^k} = \{0, 1, 2 \dots p^k - 1\}$$
$$\mathbb{Z}_{p^{k-1}} = \{0, 1, 2 \dots p^{k-1} - 1\}$$

csoportok az összeadásra (modulo a megfelelő szám).
Legyen

$$\varphi : \mathbb{Z}_{p^{k-1}} \mapsto \mathbb{Z}_{p^k}$$
$$\varphi : x \mapsto p \cdot x$$

Figyeljük meg, hogy itt nem szükséges maradékot venni, mert $p \cdot \left(p^{k-1} - 1\right) = p^k - p < p^k$.
Lássuk be, hogy φ egy injektív csoport homomorfizmus.

homomorfizmus Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{p^{k-1}}$ és összegük legyen y (modulo p^{k-1}), azaz

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 = y \quad \in \mathbb{Z}_{p^{k-1}}. \\
\Updownarrow \\
x_1 + x_2 \equiv y \mod p^{k-1} \\
\Downarrow \\
p \cdot (x_1 + x_2) \equiv p \cdot y \mod p^k \\
p \cdot x_1 + p \cdot x_2 \equiv p \cdot y \mod p^k \\
\Updownarrow \\
\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \equiv \varphi(x_1 + x_2) \mod p^k \\
\Updownarrow \\
\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \quad \in \mathbb{Z}_{p^k}
\end{gathered}$$

injektív

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$
$$p \cdot x = p \cdot y$$
$$x = y$$

Ekkor a homomorfizmus tétel értelmében

$$\mathbb{Z}_{p^{k-1}} / \underbrace{\mathrm{Ker}(\varphi)}_{\{0\}} \simeq \mathrm{Im}(\varphi)$$
$$\mathbb{Z}_{p^{k-1}} \simeq \mathrm{Im}(\varphi) \leqslant \mathbb{Z}_{p^k}$$

□

Figyeljük meg, hogy az utolsó lépésnél használtuk azt, hogy bármilyen

$$\varphi : G \mapsto H$$

csoport homomorfizmus esetén

$$\mathrm{Im}(\varphi) \leqslant H.$$

Aki ezt nem hiszi, járjon utána!